

NON-HYDROSTATIC FREE SURFACE PROFILES IN COMPOUND CHANNELS: AN IMPLICIT NUMERICAL METHOD

Cantero Chinchilla, Francisco Nicolás; Castro Orgaz, Óscar; Ayuso Muñoz, José Luis
Universidad de Córdoba

Free surface profiles in natural streams show singular features near in-stream structures or in the vicinity of critical depth passing points. The computations of those profiles allow to hydraulicians to assess flow discharge and flooding zones in compound channels, which highly affect to further technical decisions. Mainly due to the presence of non-hydrostatic pressure distribution, the free surface is no longer horizontal in the vicinity of free overfalls, which is wrongly predicted by means of the gradually-varied theory. The rapidly-varied theory is useful to accurately predict those undular profiles.

In a previous work, the Boussinesq-type non-hydrostatic equations for compound channels along with a momentum approach showed greater results than an energy approach for undulated free surface computations near overfalls. The system of equations was solved using the 4th-order Runge-Kutta method. The free surface solution is reached by trying different free surface slopes at the upstream boundary. However, this method becomes costly in terms of computation efforts as the process is non-automatic. This study presents an implicit numerical method to solve the high-order Boussinesq-type non-hydrostatic equations for compound channels using momentum. A Jacobian matrix is determined to be introduced into a Newton-Raphson method. The solution is therefore presented as automatically convergent.

Keywords: One-dimensional models; Implicit numerical method; Non-hydrostatic flows

PERFILES NO HIDROSTÁTICOS DE LÁMINA DE AGUA EN CANALES COMPUESTOS: UN MÉTODO NUMÉRICO IMPLÍCITO

Los perfiles de lámina de agua en flujos de agua naturales cerca de estructuras o puntos de calado crítico presentan singularidades. La predicción de estos perfiles permite a la comunidad hidráulica evaluar consecuencias de eventos extremos como flujos de inundación en canales abiertos, lo que influye en decisiones técnicas. La presencia de presiones no hidrostáticas condicionan los perfiles ondulatorios cerca de las caídas libres, los cuales son erróneamente predecibles bajo el uso de la teoría de flujo gradualmente variado, siendo la teoría de flujo rápidamente variado la más acertada para estos fines.

En trabajos previos, las ecuaciones no hidrostáticas tipo Boussinesq para canales abiertos mostraron mejores resultados resolviendo la cantidad de movimiento específica que la energía específica en la predicción de estos perfiles. El sistema de ecuaciones se resolvió usando el método Runge-Kutta-4th con resultados satisfactorios probando varios valores de la pendiente superficial de la lámina de agua en el punto frontera aguas arriba. Sin embargo, este método es costoso en términos de tiempo ya que no es automático. Este trabajo presenta un método numérico implícito automáticamente convergente a la solución para resolver las ecuaciones bajo el enfoque de la cantidad de movimiento específica usando el método iterativo de Newton-Raphson.

Palabras clave: Modelos Unidimensionales; Método numérico implícito; flujos no hidrostáticos

Correspondencia: z12cachf@uco.es

Agradecimientos: Este estudio es financiado por el proyecto CTM2013-4566-R de Ministerio de Economía y Competitividad.

1. Introducción

La simulación de flujos de agua sobre estructuras por parte de técnicos hidráulicos sirve para evaluar situaciones extremas de flujo que pueden amenazar la seguridad de las personas y/o bienes. Episodios extremos de lluvia a menudo producen flujos de inundación que comprometen la estabilidad de las estructuras así como de su utilidad funcional. Los perfiles de lámina de agua cerca de estructuras o puntos de calado crítico presentan ciertas singularidades. Estas necesitan ser precisamente predichas por los modelos hidráulicos. Sin embargo, no todos los modelos de uso amplio son capaces de hacerlo. Las decisiones técnicas, por tanto, se ven fuertemente condicionadas por los modelos predictivos de flujo en canales abiertos. Es en este punto donde surge la necesidad de analizar casos singulares de la interacción flujo-estructura desde el punto de vista de la hidráulica básica y de su reformulación de hipótesis.

Los perfiles de lámina de agua cerca de caída libres han sido investigados bajo la aplicación de la teoría clásica del flujo gradualmente variado (Sturm & Sadiq, 1996; Sturm, 2001; Chaudhry, 2008). Sin embargo, la presencia de presiones no hidrostáticas condicionan la aparición de perfiles ondulatorios cerca de las caídas libres (Sturm & Sadiq, 1996; Dey & Lambert, 2006), los cuales son erróneamente aproximados bajo el uso de la teoría de flujo gradualmente variado (Cantero et al., 2015). De hecho, la teoría del flujo rápidamente variado es una opción más precisa para tratar estos casos singulares de flujo ondulatorio (Serre 1953; Castro-Orgaz & Hager, 2011; Cantero et al., 2015).

La teoría de Boussinesq implica la asunción de un comportamiento no hidrostático del flujo, donde, a través de términos convectivos adicionales, la distribución de presiones en profundidad se ve modificada con respecto a la hidrostática. Los perfiles de flujo antes de una caída libre pueden ser aproximados por la ecuación de balance de energía o la de cantidad de movimiento. Precisamente, esta última presenta una mejora considerable con respecto a la primera para con los datos experimentales en la literatura (Cantero et al., 2015). Cantero et al. (2015) resuelven el sistema de ecuaciones rápidamente variado usando el método Runge-Kutta-4th con resultados satisfactorios. Mediante el método de prueba-error, se prueban valores para la pendiente superficial de la lámina de agua en el punto frontera aguas arriba hasta que el perfil alcanza el punto frontera aguas abajo, dando por tanto a la solución de perfil ondulatorio. Sin embargo, este método puede llegar a ser altamente costoso en términos de tiempo ya que no es automático al requerir iteraciones. Este trabajo presenta un método numérico implícito automáticamente convergente a la solución para resolver las ecuaciones de flujo rápidamente variado bajo el enfoque de la cantidad de movimiento específica usando el método iterativo de Newton-Raphson. Las ecuaciones de gobierno son presentadas y estudiadas en términos matemáticos. La matriz Jacobiana del sistema es calculada y presentada. Finalmente, el análisis de los resultados del modelo y las conclusiones cierran el trabajo.

2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es determinar un método numérico implícito que permita resolver automáticamente la ecuación diferencial resultante del análisis de la teoría de flujo rápidamente variado desde el uso de la conservación de la cantidad de movimiento.

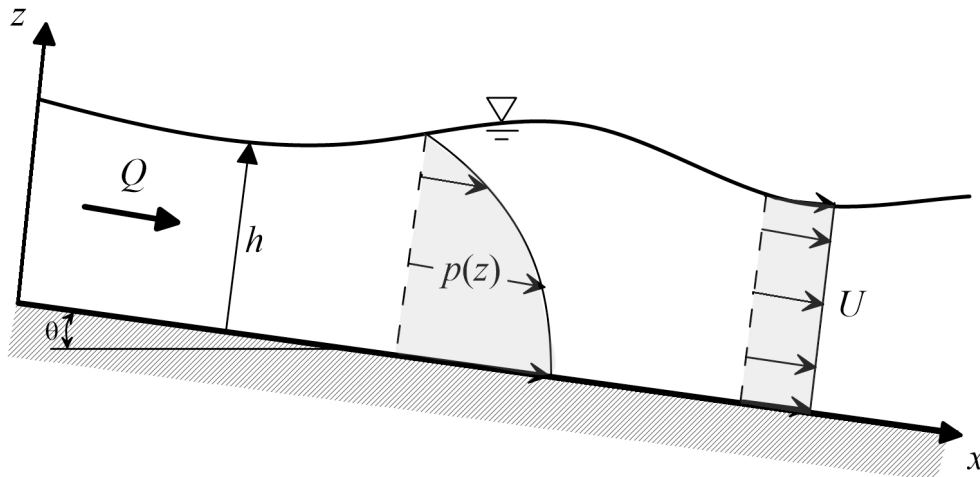
3. Ecuaciones de Gobierno

Sea un canal de sección arbitraria tal y como se muestra en la Figura 1 en el que la distribución de la velocidad del flujo en la vertical es asumida constante $u(z)=U$ y la distribución vertical de la presión $p(z)$ es (Cantero et al., 2015)

$$p(z) = \gamma \left[(h - z) \cos \theta + (U_x^2 - UU_{xx}) \left(\frac{h^2 - z^2}{2g} \right) \right] \quad (1)$$

donde h es la altura de la lámina libre medida desde la solera del canal, z es la cota medida desde la solera, θ es el ángulo de inclinación de la solera, g es la aceleración de la gravedad y γ es el peso específico del agua ($=\rho g$ donde ρ es la densidad específica del agua).

Figura 1: Esquema longitudinal de un canal de lecho fijo tipo.



Nota: Q es el caudal que circula por el canal.

Bajo estas hipótesis y condiciones, la ecuación para la cantidad de movimiento en la dirección x es (Cantero et al., 2015)

$$S = \bar{z}A \cos \theta + \frac{Q^2}{gA} \left[\beta + \frac{(h^2 A - I)}{2A^3} (AA_h h_{xx} + (AA_{hh} - A_h^2) h_x^2) \right] \quad (2)$$

donde S es la cantidad de movimiento específica, \bar{z} es distancia desde la superficie libre hasta el centro de gravedad de la sección del canal, A es el área transversal del canal, β es el coeficiente de Boussinesq, I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto a la solera, $h_x = dh/dx$, $h_{xx} = d^2h/dx^2$, $A_h = \partial A / \partial h$ y $A_{hh} = \partial^2 A / \partial h^2$.

En casos de canales de sección rectangular $A=bh$, donde b es la anchura del canal, la ecuación 2 se reduce a

$$S = b \frac{h^2}{2} + \frac{Q^2}{gbh} \left[1 + \frac{hh_{xx} - h_x^2}{3} \right] \quad (3)$$

Por otro lado, el balance de la cantidad de movimiento en el eje longitudinal es

$$\frac{dS}{dx} = A(S_0 - S_f) \quad (4)$$

donde S_0 es la pendiente longitudinal de la solera y S_f es la pendiente de fricción. Ambas ecuaciones (2) y (4) conforman la teoría de flujo rápidamente variado para la conservación de la cantidad de movimiento en flujos estacionarios.

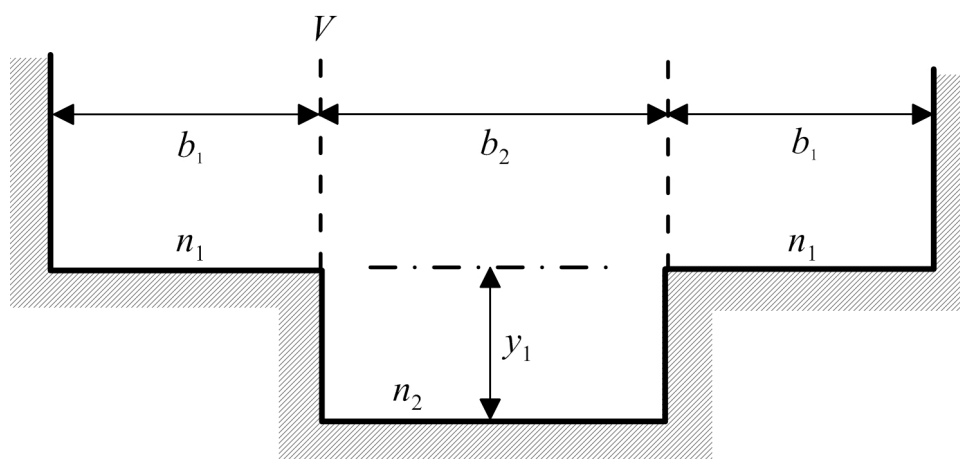
Para canales compuestos con una sección tipo tal y como se muestra en la Figura 2, S_f se calcula como sigue

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2} \quad (5)$$

$$K = k_1 + 2k_2 = \frac{1}{n_1} A_1 R_1^{2/3} + \frac{2}{n_2} A_2 R_2^{2/3} \quad (6)$$

donde K es la capacidad de transporte de la sección, k_1 y k_2 las capacidades de transporte correspondientes a la llanura de inundación y al canal central respectivamente y R_1 y R_2 son los radios hidráulicos correspondientes a la llanura de inundación y al canal central respectivamente.

Figura 2: Esquema de la sección transversal de un canal compuesto simétrico.



Nota: V simboliza la división tipo vertical entre llanuras de inundación y canal principal.

Asumiendo este tipo de sección transversal, los términos \bar{z} , I y β están dados por

$$\bar{z} = \frac{2b_2 \frac{(h-y_1)^2}{2} + b_1 \frac{h^2}{2}}{2b_2(h-y_1) + b_1 h} \quad (7)$$

$$I = 2b_2 \left(\frac{h^3}{3} - \frac{y_1^3}{3} \right) + b_1 \frac{y_1^3}{3} \quad (8)$$

$$\beta = \frac{A}{K^2} \left(\frac{k_1^2}{A_1} + 2 \frac{k_2^2}{A_2} \right) \quad (9)$$

Además, según Sturm y Sadiq (1996), los coeficientes de fricción n_1 y n_2 se pueden expresar como

$$n_1 = 1.19 \frac{\left(\left(\frac{k_{s1}^{1/6}}{\sqrt{8g}} \right) \left(\frac{R_1}{k_{s1}} \right)^{1/6} \right)}{2.2 + 2\text{Log}_{10} \left[\frac{R_1}{k_{s1}} \right]} \quad (10)$$

$$n_2 = \frac{\left(\left(\frac{k_{s2}^{1/6}}{\sqrt{8g}} \right) \left(\frac{R_2}{k_{s2}} \right)^{1/6} \right)}{2.2 + 2\text{Log}_{10} \left[\frac{R_2}{k_{s2}} \right]} \quad (11)$$

donde k_{s1} y k_{s2} son las rugosidades de fondo de la llanura de inundación y del canal principal respectivamente. El factor 1.19 que multiplica a n_1 , propuesto por Sturm y Sadiq (1996), es de base empírica.

4. Esquema Numérico

Las ecuaciones (2) y (4) han sido satisfactoriamente resueltas utilizando un esquema numérico explícito Runge-Kutta de orden 4 (Cantero et al., 2015). Introduciendo la ecuación (2) en (4) el resultado obtenido es una ecuación diferencial de tercer orden. Por lo tanto, para resolver dicha ecuación resultante de la teoría de flujo rápidamente variado son necesarias 3 condiciones de contorno. Particularizando para el caso de estudio de este trabajo, las condiciones de contorno escogidas son el punto de inicio de la lámina de agua aguas arriba, la inclinación de la lámina de agua en este punto y el nivel del flujo en el punto final antes de la caída libre. Cantero et al. (2015) resuelven las ecuaciones (2) y (4) fijando el punto de inicio e iterando el perfil para distintos valores de la pendiente de la lámina de agua en el punto inicial. La solución es aceptada cuando el perfil pasa por el punto final asumiendo una cierta tolerancia. Sin embargo, el presente trabajo propone un nuevo esquema numérico implícito para resolver estas ecuaciones.

La ecuación (4) puede reescribirse como

$$B = \frac{dS}{dx} - A(S_0 - S_f) \quad (12)$$

donde B es la función objetivo a minimizar. En otras palabras, el balance de cantidad de movimiento en la longitudinal se cumplirá si y solo si $B \rightarrow 0$. La ecuación (12) se puede discretizar numéricamente introduciendo diferencias finitas centradas de segundo orden para las derivadas primera, segunda y tercera de la altura de agua tal que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + 2h_{i-1} - h_{i-2}}{2\Delta x^3} \quad (15)$$

Introduciendo las ecuaciones (13)-(15) en (12) se obtiene una ecuación discretizada que utiliza la información del vector h en los puntos $i-2$, $i-1$, i , $i+1$ e $i+2$ para construir la información de B_i . Por tanto, es necesario recurrir a una discretización diferente de los puntos que limitan con los contornos del problema. Ya que seleccionamos 2 condiciones de contorno aguas arriba (afectando al primer y segundo punto del vector solución) y una aguas abajo (afectando al último punto del vector solución), solo será necesario definir la discretización de la ecuación (12) para el punto $n-1$, siendo n la longitud del vector solución. Para este punto empleamos diferencias finitas hacia atrás de segundo orden tal que:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_i - 2h_{i-1} + h_{i-2}}{\Delta x^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \frac{h_i - 3h_{i-1} + 3h_{i-2} - h_{i-3}}{\Delta x^3} \quad (18)$$

Las condiciones de contorno C se formulan como sigue:

- Primera condición de contorno aguas arriba C_1 es:

$$C_1 = h_1 - h_{1,dato} \quad (19)$$

C_1 representa teóricamente que el primer punto aguas arriba del perfil debe coincidir con el primer dato experimental medido en el perfil.

- Segunda condición de contorno aguas arriba C_2 es:

$$C_2 = -h_{x,1}\Delta x - h_2 + h_{1,dato} \quad (20)$$

donde $h_{x,1}$ es la pendiente de la lámina de agua en el punto inicial aguas arriba. C_2 representa el segundo punto aguas arriba de la solución, siendo definido a través de la pendiente entre ambos primer y segundo puntos.

- Condición de contorno aguas abajo C_3 es:

$$C_3 = h_n - h_{n,dato} \quad (21)$$

Al igual que C_1 , C_3 representa teóricamente que el último punto calculado coincide con el último punto medido en el perfil.

Estas condiciones de contorno permiten generar perfiles solución entre el punto inicial y el punto final medidos ambos incluidos, controlando el segundo punto aguas arriba de la solución a través de la manipulación de $h_{x,1}$.

Por tanto, la ecuación (12) se puede resolver mediante el método de Newton-Raphson sobre el siguiente sistema implícito

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial h_1} & \frac{\partial B_1}{\partial h_n} \\ \frac{\partial B_n}{\partial h_1} & \frac{\partial B_n}{\partial h_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

donde la matriz Jacobiana, siendo $B_1=C_1$, $B_2=C_2$ y $B_n=C_3$, es

$$Jac = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial h_1} & \frac{\partial B_1}{\partial h_n} \\ \frac{\partial B_n}{\partial h_1} & \frac{\partial B_n}{\partial h_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial h_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial h_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial h_1} & \frac{\partial B_3}{\partial h_2} & \frac{\partial B_3}{\partial h_3} & \frac{\partial B_3}{\partial h_4} & \frac{\partial B_3}{\partial h_5} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{\partial B_i}{\partial h_{i-2}} & \frac{\partial B_i}{\partial h_{i-1}} & \frac{\partial B_i}{\partial h_i} & \frac{\partial B_i}{\partial h_{i+1}} & \frac{\partial B_i}{\partial h_{i+2}} & \\ 0 & 0 & \frac{\partial B_{n-1}}{\partial h_{n-4}} & \frac{\partial B_{n-1}}{\partial h_{n-3}} & \frac{\partial B_{n-1}}{\partial h_{n-2}} & \frac{\partial B_{n-1}}{\partial h_{n-1}} & \frac{\partial B_{n-1}}{\partial h_n} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C_3}{\partial h_n} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Una vez resuelto el sistema (22), el vector solución se actualiza siguiendo la siguiente expresión

$$h^{k+1} = h^k - \Delta h \quad (24)$$

donde k y $k+1$ son super-índices que hacen referencia al estado actual y posterior del vector h .

La secuencia computacional es:

1. Se obtienen las posiciones inicial y final del vector solución desde los datos experimentales para construir C_1 y C_3 .
2. Se adopta un valor para $h_{x,1}$.
3. Se adopta un vector solución arbitrario para h .
4. Se calcula la matriz Jacobiana del sistema utilizando la ecuación (23).
5. Se resuelve el sistema de la ecuación (22).
6. Se emplea la ecuación (24) para actualizar la solución de h .
7. Se vuelve al paso 4 hasta que una cierta tolerancia sea alcanzada tal que:

$$\max[\Delta h] < tol \quad (25)$$

En este trabajo se adopta $tol=0.001$ m.

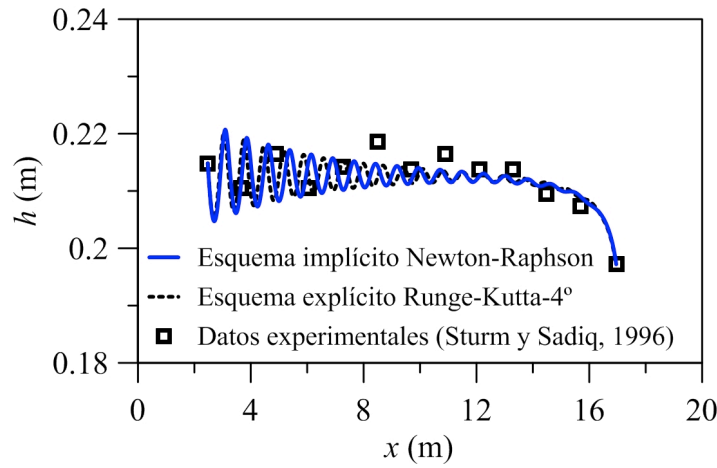
5. Caso de Estudio y Resultados

El caso de estudio adoptado es el presentado por Sturm y Sadiq (1996) para un perfil estacionario de lámina libre en un canal de sección compuesta con caída libre como condición de contorno final. El caudal circulante medido es de $Q=0.113$ m³/s. La geometría de la sección transversal del canal se define por $b_1=0.267$ m, $b_2=0.934$ m e $y_1=0.152$ m (ver Figura 2). La pendiente longitudinal del canal es $S_0=0.005$ y la longitud del tramo medido es

de 17.03 m. Las rugosidades de fondo en las llanuras de inundación y en el canal central son, respectivamente, $k_{s1}=0.007$ y $k_{s2}=0.0061$.

Adoptando un paso de malla $\Delta x=0.02$ m, la Figura 3 muestra los resultados de esquema numérico explícito Runge-Kutta-4º (Cantero et al., 2015) en comparación con los del esquema implícito Newton-Raphson propuesto en este trabajo para $h_{x,1}=-0.076039$ [valor encontrado por Cantero et al. (2015)]. La solución inicial para el vector solución h es un nivel constante $h=h_{1,dato}$. El resultado del esquema numérico implícito es mostrado tras 4 iteraciones.

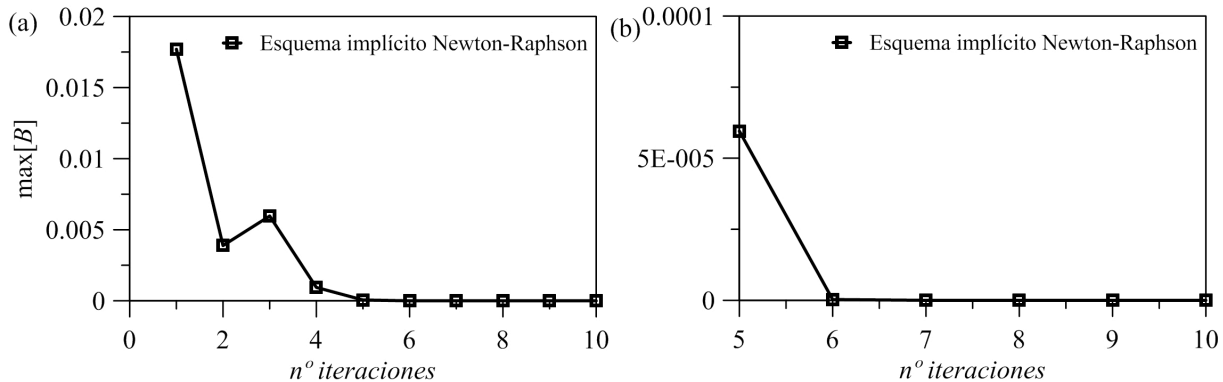
Figura 3: Comparación entre esquemas explícito e implícito para el caso de estudio de Sturm y Sadiq (1996).



Nota: $Q=0.113$ m³/s.

La Figura 4 muestra la evolución del error residual en el esquema implícito en función del número de iteraciones. En concreto, la Figura 4b presenta un detalle de la rama horizontal en al Figura 4a (véase de la quinta iteración en adelante). La rápida convergencia del esquema numérico para iteraciones superiores a 6 (Figura 4b) hace que sea imperceptible la variación del error residual para la escala considerada.

Figura 4: Análisis de convergencia del esquema implícito para el caso de estudio de Sturm y Sadiq (1996)



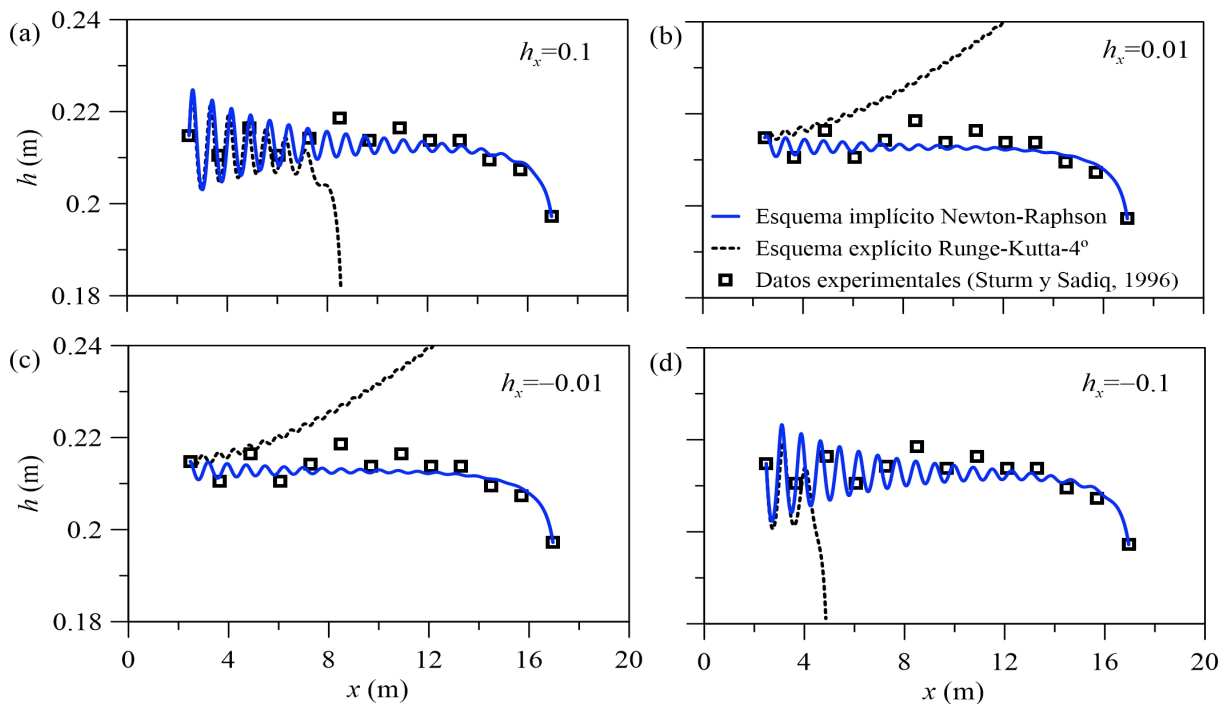
Nota: $\max[B]_{5 \text{ iteraciones}} = 5.95 \cdot 10^{-5}$, $\max[B]_{10 \text{ iteraciones}} = 1.41 \cdot 10^{-14}$.

6. Discusión

Del análisis de la Figura 4 se puede afirmar que el esquema numérico implícito Newton-Raphson propuesto en este trabajo es rápidamente convergente hacia la solución. Para un valor asignado de la pendiente en el punto inicial aguas arriba, el método numérico consigue un error máximo menor a la tolerancia establecida con solo 4 iteraciones. Es de reseñar que el esquema invierte 4 iteraciones en llegar a la solución por debajo de la tolerancia partiendo de un vector de altura h constante. Asumiendo la solución de la teoría del flujo gradualmente variado como vector inicial, la rapidez de la convergencia podría mejorarse. De todas formas, el tiempo computacional empleado en las 4 primeras iteraciones es aproximadamente 70 segundos, lo que supone un tiempo asumible ya que la resolución del sistema es automática.

Por otro lado, las dos soluciones explícita e implícita de la ecuación (12) difieren ligeramente presentando un desfase entre ambas aproximadamente entre los 4 y los 10 metros (Figura 3). Esto puede ser debido a las diferencias de precisión entre ambos métodos. El esquema explícito alcanza su solución final cuando el punto final calculado entra dentro de un rango aceptable cercano al punto final medido. Sin embargo, el esquema implícito ajusta perfectamente el último punto antes de la caída libre, ya que forma parte de las condiciones de contorno en el esquema implícito. Otra explicación posible para dicho desfase entre soluciones se puede buscar desde el punto de vista del carácter forzado de la solución. Aun estableciendo condiciones de contorno diferentes a las condiciones de equilibrio medidas del perfil de la lámina de agua, el esquema implícito es capaz de ajustar la solución mediante el forzamiento del perfil. Como ejemplo, la Figura 5 muestra la solución del esquema implícito para diferentes valores de $h_{x,1}$, todos diferentes de la condición de equilibrio encontrada para el esquema explícito (Cantero et al., 2015). Todas las soluciones en la Figura 5 cumplen la tolerancia establecida para el vector residuo B con 10 o más iteraciones.

Figura 5: Análisis de soluciones de no equilibrio para el caso de estudio de Sturm y Sadiq (1996).



Nota: (a) $h_{x,1}=0.1$, (b) $h_{x,1}=0.01$, (c) $h_{x,1}=-0.01$ y (d) $h_{x,1}=-0.1$.

7. Conclusiones

Este trabajo presenta un esquema numérico implícito Newton-Raphson para la resolución de la teoría de flujo rápidamente variado desarrollado desde el balance de la cantidad de movimiento en Cantero et al. (2015). Las condiciones de contorno para el sistema implícito que resuelve la ecuación diferencial de tercer grado son presentadas y justificadas. La matriz Jacobiana del sistema es definida. En base al caso de estudio del perfil con caída libre presentado por Sturm y Sadiq (1996), los resultados del esquema explícito e implícito son comparados entre sí. El esquema numérico implícito presentado en este trabajo permite llegar a la solución del perfil de manera autónoma con pocas iteraciones y con un coste computacional bajo. La comparativa entre las soluciones explícita e implícita indica que existe un leve desfase entre ambas soluciones. Además, sendos análisis de convergencia y de forzamiento de condiciones de contorno son presentados. La convergencia del presente esquema numérico es rápida y produce residuos muy por debajo de la tolerancia establecida. El forzado de la solución también es solucionado satisfactoriamente. Por lo tanto, el presente esquema numérico implícito es presentado como un esquema robusto.

9. Referencias

- Cantero, F., Castro-Orgaz, O., Garcia-Marín, A., Ayuso, J. L., & Dey, S. (2015). Free surface profiles in river flows: Can standard energy-based gradually-varied flow computations be pursued?. *Journal of Hydrology*, 529, 1644–1656.
- Castro-Orgaz, O., & Hager, W. H. (2011). Turbulent near-critical open channel flow: Serre's similarity theory. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(5), 497–503.
- Chaudhry, M. H. (2008). *Open-channel flow*. Springer Science & Business Media.
- Dey, S., & Lambert, M. F. (2006). Discharge prediction in compound channels by end depth method. *Journal of Hydraulic Research*, 44(6), 767–776.
- Serre, F. (1953). Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, (6), 830–872.
- Sturm, T. W. (2010). *Open channel hydraulics*. New York: McGraw-Hill.
- Sturm, T. W., & Sadiq, A. (1996). Water surface profiles in compound channel with multiple critical depths. *Journal of Hydraulic Engineering*, 122(12), 703–709.