

03-045

### **Prediction by means of numerical simulation of fatigue life in mechanical components subject to random vibrations: methodology-parameters to consider**

Javier Abad; Jesús Cuartero; Hugo Malón

Universidad de Zaragoza;

There are many areas of engineering in which the dimensioning of mechanical components must be carried out in the face of dynamic demands that vary over time. These variable stresses generate fatigue phenomena in the material that must be considered in order to properly predict fatigue life in the same.

These solicitations can be deterministic or random. In the second case, since the determination by numerical models of the temporal response of the component object of study, is practically unapproachable, is why methods of resolution are used in the frequency domain, using as input the PSD of the Random signal of the excitation and obtaining the PSD of the response of the structure.

In this work, several methodologies for the determination of the amplitude and number of fatigue cycles from the stress response PSD obtained from the numerical model of the component to be studied are shown. Reference is also made to the various parameters to be considered in the definition of the numerical model and how to obtain them precisely and the influence they have on the determination of fatigue life of said component.

**Keywords:** Random vibration; fatigue cycles; index damage; Fatigue Life;

### **Predicción mediante simulación de la vida a fatiga en componentes mecánicos sometidos a vibraciones aleatorias: metodología y parámetros a considerar**

Son muchos los ámbitos de la ingeniería en los que el dimensionamiento de los componentes mecánicos debe realizarse frente a solicitaciones dinámicas variables en el tiempo. Estas solicitaciones variables generan fenómenos de fatiga en el material que deben ser considerados con el fin de predecir adecuadamente la vida a fatiga en el mismo.

Estas solicitaciones pueden ser deterministas o aleatorias. En el segundo de los casos y dado que la determinación mediante modelos numéricos de la respuesta temporal del componente objeto de estudio, es inabordable de forma práctica es por lo que se emplean métodos de resolución en el dominio frecuencial, empleando como entrada los PSD de la señal aleatoria de la excitación y obteniendo los PSD de la respuesta de la estructura.

En este trabajo se muestran diversas metodologías para la determinación de la amplitud y número de ciclos de fatiga a partir del PSD de respuesta en tensiones obtenido a partir del modelo numérico del componente a estudiar. Se hace también referencia a los diversos parámetros a considerar en la definición del modelo numérico y cómo obtenerlos de forma precisa y la influencia que éstos tienen en la determinación de la vida a fatiga de dicho componente.

**Palabras clave:** Vibración aleatoria; ciclos de fatiga; índice de daño; vida a fatiga

Correspondencia: Hugo Malón hml@unizar.es



Este obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional. <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

## 1. Introducción

Son numerosos los componentes mecánicos que se ven sometidos a cargas cíclicas cuya amplitud generan tensiones inferiores a la resistencia del material pero que sin embargo pueden provocar un fallo prematuro debido a la fatiga que sobre el material generan esas cargas aplicadas de forma repetida (Sighley & Mischke, 1998). Son numerosos los ámbitos de la ingeniería en los que el diseño y validación de dichos componentes deben realizarse atendiendo a estándares (Lalanne, 2014, vol.5) o normas de severidad que definen los niveles de vibración con los que deben diseñarse y validarse posteriormente mediante ensayo, fijando un número de horas o ciclos de carga que dicho componente debe ser capaz de soportar sin que aparezcan signos de fatiga.

Es habitual que los estándares y normas anteriormente citados incluyan solicitaciones dinámicas de carácter aleatorio cuya amplitud viene definida mediante los valores de densidad de energía en el dominio frecuencial. La determinación numérica de la respuesta del sistema se obtiene, de igual manera, en el dominio frecuencial y por lo tanto se hace necesario emplear algoritmos que permitan estimar la vida a fatiga del componente basados en dicha respuesta en frecuencia. Estos algoritmos permiten determinar, a través de combinaciones de funciones de probabilidad, la distribución de amplitudes de los ciclos de tensión y construir así el histograma de rangos de tensiones. A continuación y mediante las curvas de fatiga del componente se determinará, empleando una regla de acumulación de daño, el índice de daño total provocado sobre el mismo.

## 2. Objetivos

Dado que son numerosos los aspectos, tanto de índole experimental como numérico, que intervienen en la metodología a emplear para estimar la vida a fatiga de un componente, se muestra en este trabajo un estudio sobre la influencia que diversos parámetros, que intervienen a lo largo de dicho proceso, presentan sobre el resultado final. Así se ha estudiado la influencia que sobre la predicción del daño a fatiga tiene la variación de los siguientes parámetros:

- Frecuencia natural
- Amortiguamiento modal
- Resistencia del material
- Límite a fatiga del componente
- Resultados del modelo numérico
- Resolución frecuencial

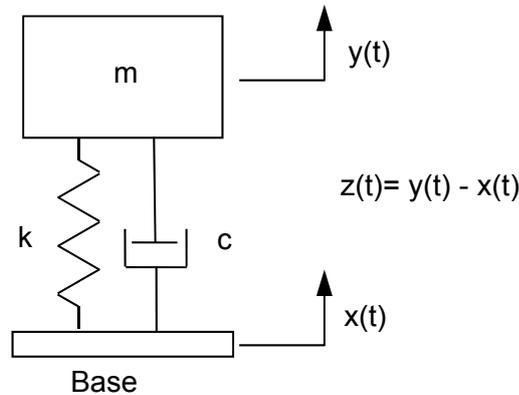
## 3. Metodología

Con el fin de alcanzar los objetivos anteriormente planteados y poder analizar la influencia de los parámetros señalados previamente sobre la predicción del nivel de daño en un componente, la metodología de análisis se va a aplicar a un sistema de 1 G.D.L. sometido a un movimiento vibratorio de la base, como se muestra en la figura 1.

Para ello caracterizaremos el sistema mediante los parámetros de frecuencia natural:  $\omega_n$ , e índice de amortiguamiento modal:  $\zeta$ . El primero de ellos relacionado con la rigidez y masa del sistema y el segundo con el de disipación de energía. Dado que para llevar a cabo el análisis a fatiga del componente necesitamos determinar las tensiones en el mismo y que

éstas son proporcionales a los desplazamientos relativos entre la base y la masa, se determina la amplitud de la función de respuesta en frecuencia (FRF) del sistema mediante la ecuación 1 (Rao, 1995).

**Figura 1: Modelo de 1 G.D.L. analizado**



Por otro lado y dado el carácter aleatorio de la vibración aplicada a la base, ésta se define mediante los niveles de excitación en frecuencia expresados mediante los valores de densidad espectral de potencia (PSD por sus siglas en inglés). Si  $x(t)$  es la señal aleatoria, el espectro frecuencial de la misma viene definido mediante la ecuación 2 y la PSD mediante la ecuación 3 (Dimarogonas & Haddad, 1992)

$$|H(\omega)| = \frac{z}{x} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta(\omega/\omega_n))^2}} \quad (1)$$

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

$$G_x(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{|X(i\omega)|^2}{\Delta\omega} \quad (3)$$

En la ecuación 3,  $X(i\omega)$  se toma como el valor medio a lo largo del intervalo  $\Delta\omega$ . Es habitual que la excitación aleatoria sobre el sistema se defina mediante la PSD de aceleraciones y por ello es necesario realizar un cambio de unidades para, como se ha señalado anteriormente, determinar la respuesta en desplazamientos relativos. El cambio de unidades se realiza según la ecuación 4 (Lalanne, 2014, vol.3).

$$G_x(\omega) = \frac{G_{\ddot{x}}(\omega)}{\omega^4} \quad (4)$$

Finalmente y siendo  $K$  la constante de proporcionalidad que relaciona el desplazamiento relativo con la tensión mecánica generada en el componente, determinaremos la PSD de tensiones mediante la ecuación 5 (Ewins, 2000), determinado a partir de la FRF del sistema y la PSD de la excitación del sistema.

$$G_\sigma(\omega) = (K \cdot |H(\omega)|)^2 \cdot G_x(\omega) \quad (5)$$

La determinación del daño por fatiga en el componente analizado se realizará mediante la ecuación 6.

$$D = \sum_{i=1}^j \frac{n_i(S_i)}{N_i(S_i)} = \sum_{i=1}^j \frac{p[S_i] \cdot E[P] \cdot T \cdot S_i}{N_i(S_i)} \quad (6)$$

Donde  $D$  es el daño acumulado en el componente que se determina mediante la regla de Palmgren-Miner (Miner, 1945) (Ruiz, Peláez & Martínez, 2003),  $n_i(S_i)$  es el número de ciclos de tensión con un rango  $S_i$  esperados a lo largo del tiempo  $T$  durante el cual se ve sometido a vibración dicho componente,  $E[P]$  es el número de picos esperados por unidad de tiempo,  $p[S_i]$  es la Función de Densidad de Probabilidad (PDF por sus siglas en inglés) del rango de tensiones y  $N_i(S_i)$  es el número de ciclos para que se produzca el fallo en el componente sometido a un rango de tensiones  $S_i$ , obtenidos a partir de la curva de fatiga S-N del componente objeto de análisis.

Dirlik (1985) propuso una expresión empírica para estimar la PDF del rango de tensiones basada en una suma ponderada de las funciones de probabilidad de Rayleigh, de Gauss y exponencial, definida mediante la ecuación 7 cuyos coeficientes fueron determinados para minimizar el error entre los histogramas determinados para varios tipos de señales y los obtenidos por dicha expresión empírica. Para ello llevó a cabo un elevado número de simulaciones mediante ordenador basándose en la técnica de Monte Carlo.

$$p[S_i] = \frac{\frac{D_1}{Q} \cdot e^{\left(\frac{-U}{Q}\right)} + \frac{D_2 \cdot U}{R^2} \cdot e^{\left(\frac{-U^2}{2R^2}\right)} + D_3 \cdot U \cdot e^{\left(\frac{-U^2}{2}\right)}}{2\sqrt{m_0}} \quad (7)$$

Dichos coeficientes se determinan a partir de diversos momentos de orden  $n$  ( $m_0, m_1, m_2, m_4$ ) del área correspondiente a la PSD de respuesta del sistema expresado en tensiones. El enésimo momento de área de la PSD se determina según la ecuación 8.

$$m_n = \int f^n \cdot G_\sigma(f) df \quad (8)$$

Siendo  $G_\sigma(f)$  el valor de la PSD a la frecuencia  $f$ , en Hz. Calculándose los coeficientes que aparecen en dicha función de Dirlik según se indica en las ecuaciones 9.

$$U = \frac{S_i}{2\sqrt{m_0}}; \quad \gamma = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 \cdot m_4}}; \quad x_m = \frac{m_1}{m_0} \cdot \sqrt{\frac{m_2}{m_4}}$$

$$D_1 = \frac{2 \cdot (x_m - \gamma^2)}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}; \quad R = \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - R}; \quad D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}{1 - R}; \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2$$

$$D_1 = \frac{2 \cdot (x_m - \gamma^2)}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2} \quad (9)$$

El valor de  $E[P]$  se determina también a partir de los valores de momentos de área de la PSD según la ecuación (10).

$$E[P] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (10)$$

Por otra parte la determinación del número de ciclos  $N_i(S_i)$  se lleva a cabo a partir de la curva S-N de comportamiento a fatiga del componente, definida mediante la ecuación 11.

$$S_i = A \cdot (2N_i)^B \quad (11)$$

Los coeficientes  $A$  y  $B$  que definen la curva S-N se determinan mediante la ecuación 12, a partir de los valores de resistencia a fatiga del componente para  $10^3$  y  $10^6$  ciclos,  $S_{10^3}$  y  $S_e$ , respectivamente.

Estos valores de resistencia a la fatiga del componente se determinan a partir de los valores equivalentes determinados para la probeta del material con el que se fabricará el

componente y que a falta de ensayos específicos se puede estimar a partir del valor de resistencia del material:  $R_m$ .

$$A = \frac{(S_{10^3})^2}{S_e}; \quad B = \frac{\log\left(\frac{S_e}{S_{10^3}}\right)}{3} \quad (12)$$

El límite de fatiga de la probeta cuando el fallo se produce a los  $10^3$  ciclos se estima como  $S'_{10^3} = 0,9R_m$  y el valor del límite de fatiga a nivel probeta a vida alta, lo que corresponde a  $10^6$  ciclos se estima como  $S'_e = 0,5R_m$  (valor correspondiente para un valor de  $R_m \leq 1400$  MPa) (Besa et. al., 2003).

Los valores de resistencia a fatiga a nivel de probeta se deben de corregir en función de diversos factores, según se indica en la ecuación 13, de forma que se obtienen los valores de resistencia a fatiga a nivel de componente.

$$S_{10^3} = \frac{K_c \cdot K_d \cdot K_e \cdot K_{car}}{K_f} \cdot S'_{10^3}$$

$$S_e = \frac{K_a \cdot K_b \cdot K_c \cdot K_d \cdot K_e \cdot K_{car}}{K_f} \cdot S'_e \quad (13)$$

Las constantes indicadas corresponden a factores correctores según diversos efectos:  $K_a$  factor de acabado superficial,  $K_b$  factor corrector de tamaño del componente,  $K_c$  factor de confiabilidad,  $K_d$  factor de temperatura,  $K_e$  factor de efectos varios,  $K_{car}$  factor de tipo de esfuerzo y  $K_f$  factor de sensibilidad a la entalla. Para el cálculo de  $S_{10^3}$ , los factores  $K_a$  y  $K_b$ , se toman igual a la unidad ya que no influyen en la resistencia a fatiga para 1000 ciclos.

#### 4. Caso de estudio

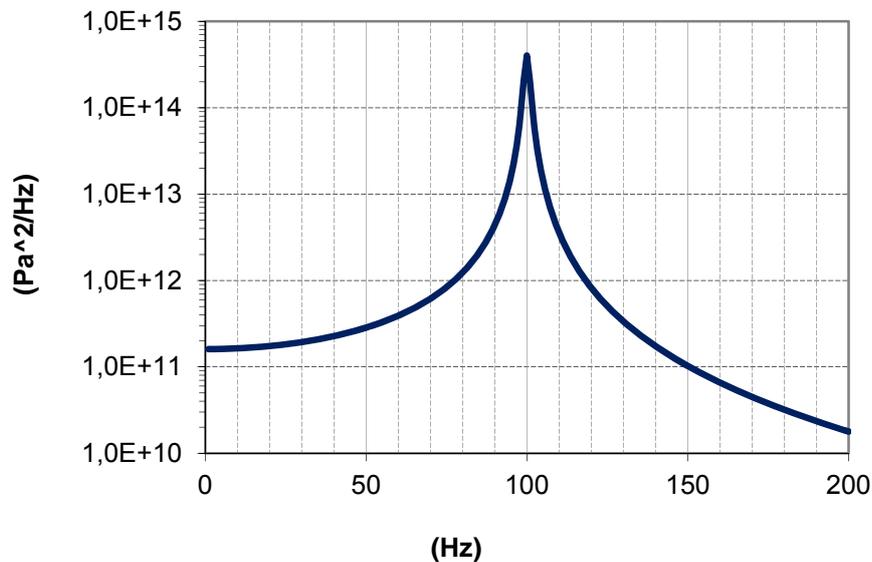
El modelo de referencia de 1 GDL empleado en el estudio viene definido por un valor de frecuencia natural  $f_n = 100\text{Hz}$  y un amortiguamiento modal  $\zeta=1\%$ . El sistema se somete a una vibración en la base definida por una PSD en aceleraciones con un valor constante de  $0.1((\text{m/s}^2)^2)/\text{Hz}$  en un rango frecuencial comprendido entre 1Hz y 200Hz. La constante de proporcionalidad entre la amplitud de los desplazamientos relativos y las tensiones mecánicas que generan se ha fijado en un valor  $K=5e11\text{Pa/m}$ . Con estos parámetros la PSD de respuesta del modelo que se ha obtenido es la que se indica en la figura 2, determinada con una resolución frecuencial de 1Hz.

A partir de la PSD de la figura 2 y aplicando el modelo de Dirlik se ha procedido a determinar el histograma representado en la figura 3, dicho histograma se determina para un rango de amplitudes de hasta  $S_i = 4\sigma_{\text{RMS}}$ , que corresponde con un nivel de confianza del 99.994%, dividiendo dicho rango en 100 intervalos iguales. Para los parámetros de referencia se ha obtenido un valor de  $\sigma_{\text{RMS}}=35.5\text{MPa}$ .

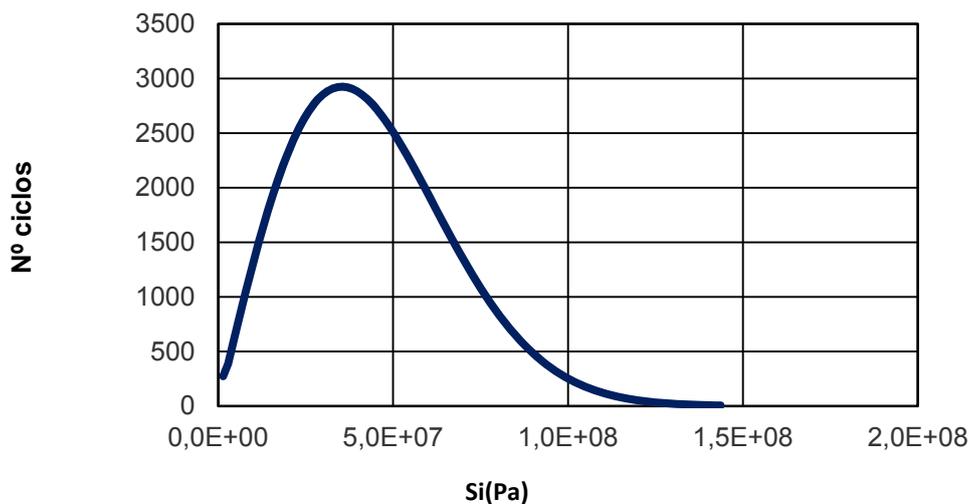
Para determinar el daño a fatiga se han fijado como valores de referencia para el comportamiento a fatiga del componente los siguientes:  $S_{10^3} = 330\text{MPa}$  y  $S_e = 60\text{MPa}$ , obteniéndose un índice de daño  $D=0.23$ , considerando un tiempo de sollicitación del componente  $T=1200\text{s}$ .

Tomando como referencia los valores indicados anteriormente, se ha procedido a estudiar la influencia que sobre el comportamiento a fatiga del componente presenta la incertidumbre en la determinación, bien experimentalmente o bien mediante simulación, de los diversos parámetros que definen la determinación del daño a fatiga.

**Figura 2: PSD de tensiones, modelo de referencia**



**Figura 3: Histograma, modelo de referencia**



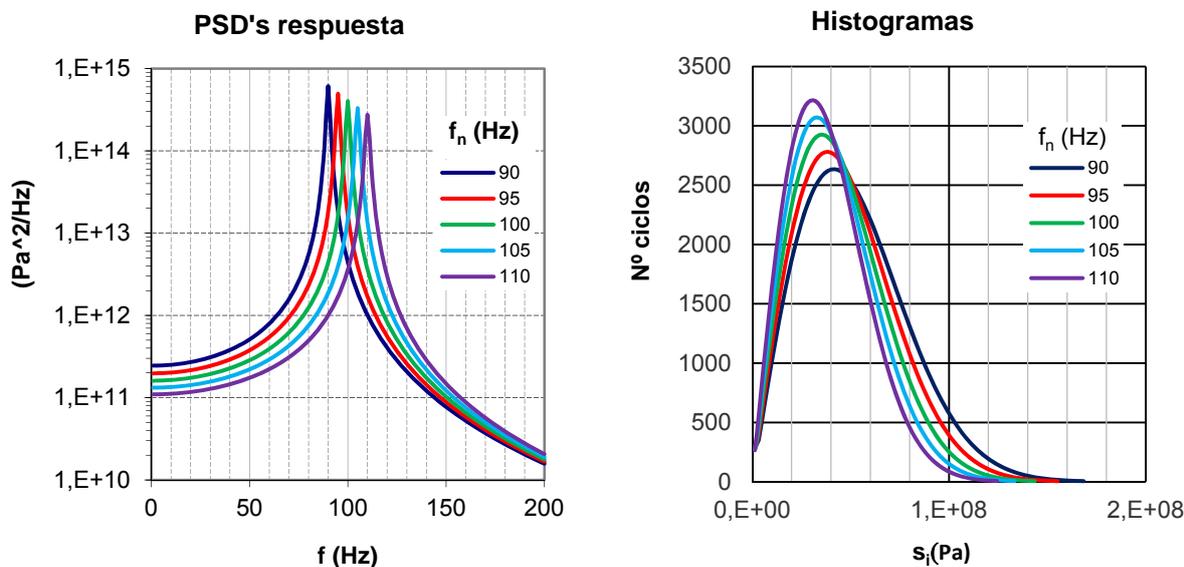
## 5. Resultados

Con el fin de facilitar la interpretación de los resultados obtenidos, y donde ha sido posible, las representaciones en las gráficas de los parámetros empleados en el análisis se han normalizado respecto a los valores de referencia indicados en el apartado anterior.

### 5.1 Frecuencia natural

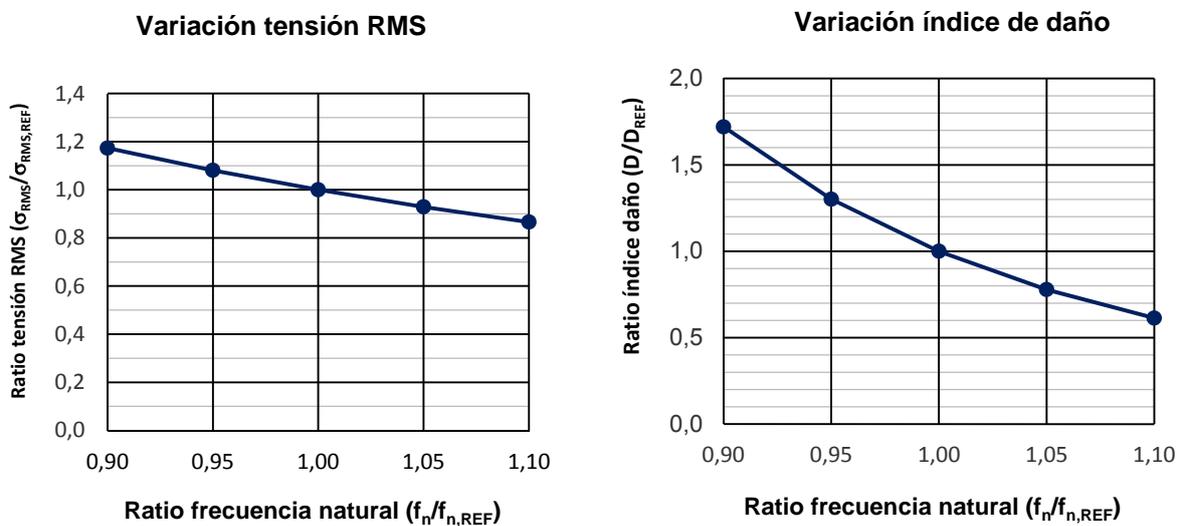
Las fuentes de incertidumbre sobre este parámetro vienen definidas tanto por parámetros determinados experimentalmente, como el módulo de elasticidad y densidad del material, como por aproximaciones y simplificaciones realizadas en la modelización numérica del componente. Se muestra en la figura 4 las PSD's e histogramas obtenidos para distintos valores de frecuencias naturales.

Figura 4: PSD's de tensiones e histogramas, al variar la frecuencia natural



A partir de estos resultados obtenemos cómo varían los valores de la tensión  $\sigma_{\text{RMS}}$  y del índice de daño  $D$ , al variar la frecuencia natural del sistema, figura 5.

Figura 5: Variación de tensión  $\sigma_{\text{RMS}}$  e índice de daño  $D$ , al variar la frecuencia natural



## 5.2 Amortiguamiento modal

La determinación experimental de este parámetro presenta una cierta complejidad que hace que su variabilidad pueda ser importante (Peter, 2011). Se muestra en la figura 6 las PSD's e histogramas obtenidos para distintos valores de amortiguamiento modal.

Con los resultados anteriores se determinarán los valores de la tensión  $\sigma_{\text{RMS}}$  y del índice de daño  $D$ , pudiéndose observar en la figura 7 su variación con el amortiguamiento modal del sistema

Figura 6: PSD's de tensiones e histogramas, al variar el amortiguamiento

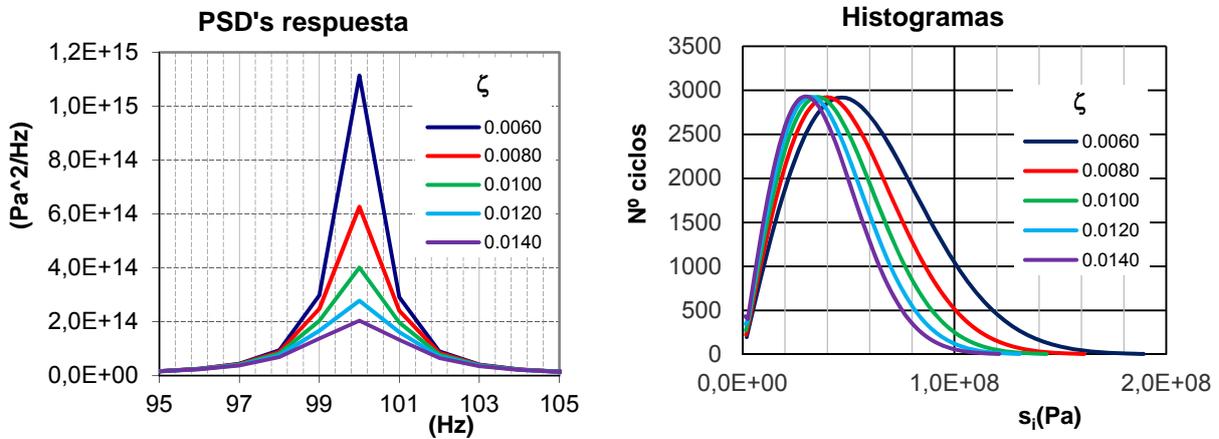
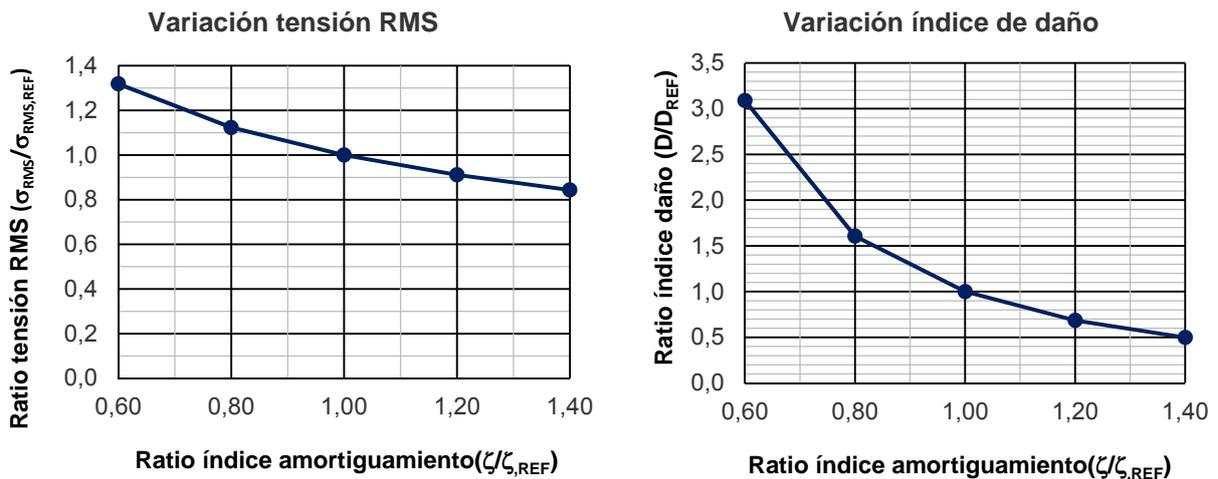


Figura 7: Variación de tensión  $\sigma_{\text{RMS}}$  e índice de daño D, al variar el amortiguamiento

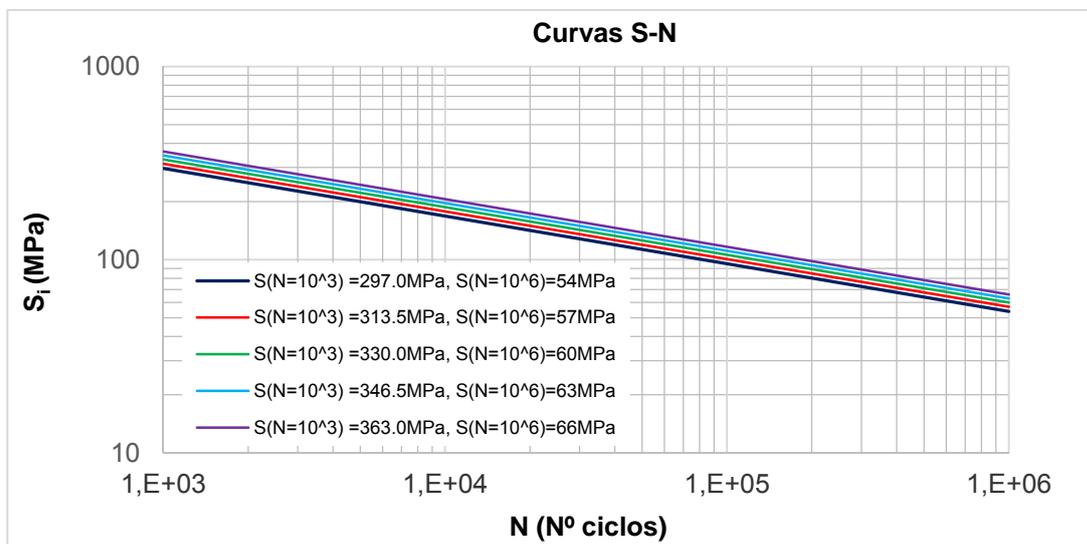


### 5.3 Resistencia del material

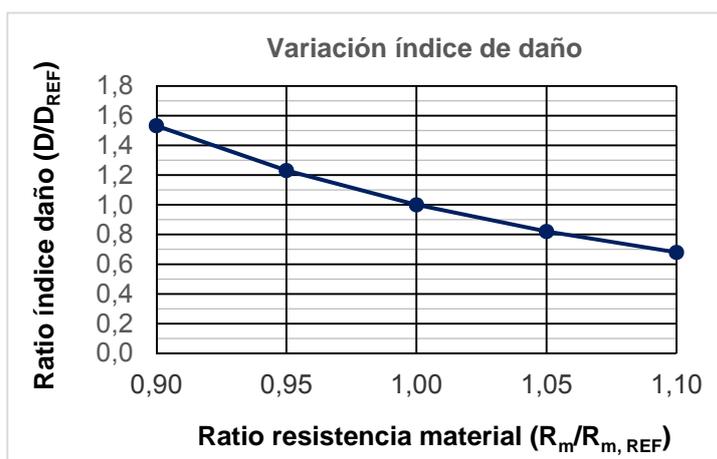
Dado que tanto el límite de fatiga de la probeta cuando el fallo se produce a los  $10^3$  ciclos como el valor del límite de fatiga a nivel probeta a  $10^6$  ciclos se estiman en función del valor de resistencia del material, cualquier incertidumbre en la determinación experimental del mismo influirá por igual en ambos valores, y por ende a los valores equivalentes a nivel de componente. Desde el punto de vista de las curvas de fatiga S-N del componente se obtendrán curvas paralelas, pero con la misma pendiente, como se muestra en la figura 8.

Esta variación en la determinación de la resistencia del material no influye en las PSD de respuesta del componente y por lo tanto tampoco en los histogramas de tensiones. Este parámetro influye únicamente en la determinación del índice de daño del componente, como se indica en la figura 9.

**Figura 8: Curvas S-N para diversos valores de  $S_{10^3}$  y  $S_e$ , como consecuencia de variaciones en la determinación de la resistencia del material  $R_m$**



**Figura 9: Variación del índice de daño D, al variar la resistencia del material  $R_m$**



#### 5.4 Límite a fatiga del componente

Dado que la determinación de la resistencia a fatiga del componente se realiza corrigiendo, mediante una serie de factores, los valores de resistencia a fatiga determinados a nivel probeta, cualquier incertidumbre en la determinación o estimación de los mismos influirá en la determinación de los valores de resistencia a fatiga a nivel de componente. Si observamos la ecuación 13, son los factores de acabado superficial y de tamaño los que afectan únicamente a la corrección para determinar la resistencia a fatiga del componente para los  $10^6$  ciclos. Desde el punto de vista de las curvas de fatiga S-N del componente la incertidumbre en la determinación de los factores correctores  $K_a$  y  $K_b$  supone obtener curvas con pendientes distintas, como se muestra en la figura 10.

Al igual que en el apartado anterior, este parámetro influye únicamente en la determinación del índice de daño del componente, como se indica en la figura 11.

Figura 10: Curvas S-N, al variar la resistencia a fatiga  $S_e$ .

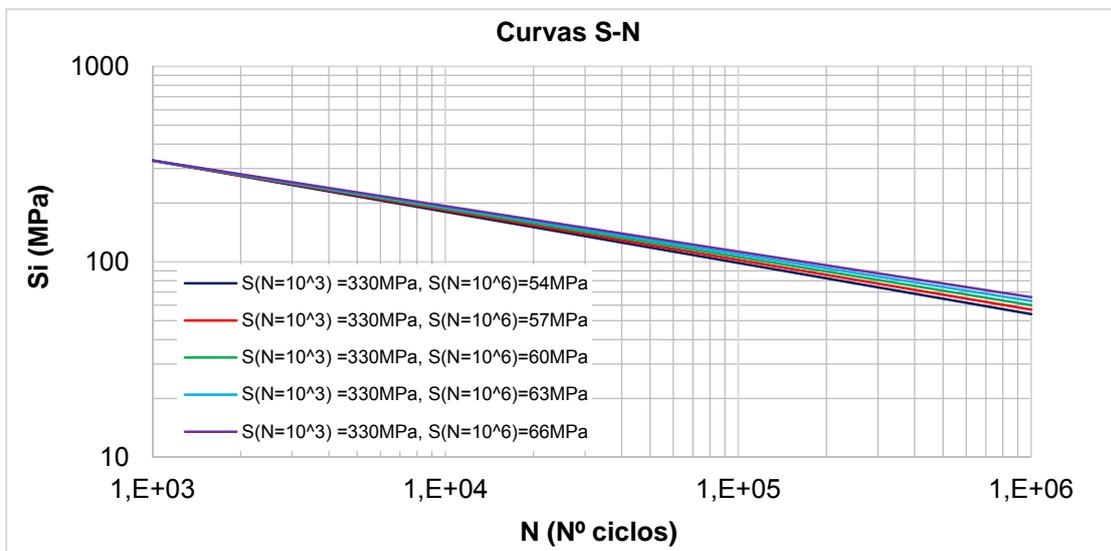
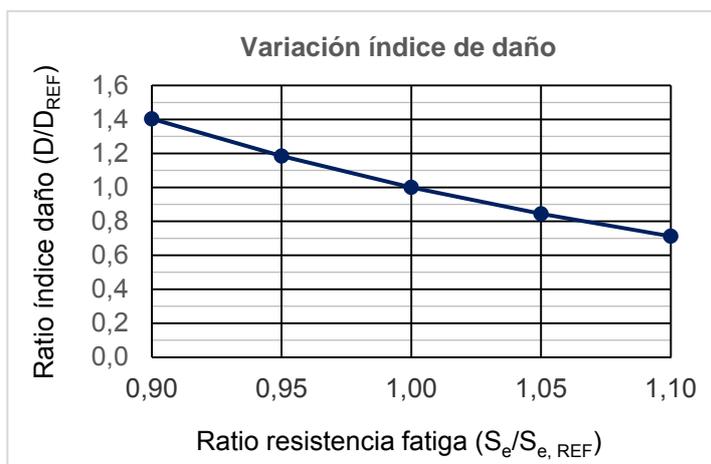


Figura 11: Variación del índice de daño D, al variar la resistencia a fatiga  $S_e$ .



La variabilidad en el resto de factores correctores, al influir tanto en la resistencia a fatiga para  $10^3$  ciclos como en la resistencia a fatiga para  $10^6$  ciclos, daría lugar a curvas S-N paralelas entre sí, influyendo sobre el índice de daño de forma análoga a lo visto en el apartado anterior, donde se analizaba la influencia que la determinación de la resistencia  $R_m$  del material tiene sobre el análisis a fatiga del componente.

### 5.5 Resultados del modelo numérico

De forma habitual la determinación de la respuesta vibratoria del componente mecánico objeto de análisis se lleva a cabo mediante un modelo numérico basado en el método de los elementos finitos. Ésta nos permite determinar, para cualquier punto de la geometría, la PSD de tensiones para una PSD de excitación dada. La exactitud de la respuesta obtenida dependerá de diversos factores asociados a la discretización realizada. Así aspectos como el tamaño de elemento empleado en la malla o la formulación del mismo condicionan el resultado obtenido. Con el objetivo de analizar la influencia que estos aspectos pueden tener sobre la determinación del índice de daño, se han llevado a cabo análisis para diversos

valores de la constante K de proporcionalidad entre la amplitud de desplazamientos relativos y las tensiones mecánicas que produce. Se muestra en la figura 12 las PSD's e histogramas obtenidos para distintos valores de constante de proporcionalidad y a partir de éstos se ha determinado cómo varían los valores de la tensión  $\sigma_{RMS}$  y del índice de daño D, figura 13.

Figura 12: PSD's de tensiones e histogramas, al variar la constante de proporcionalidad

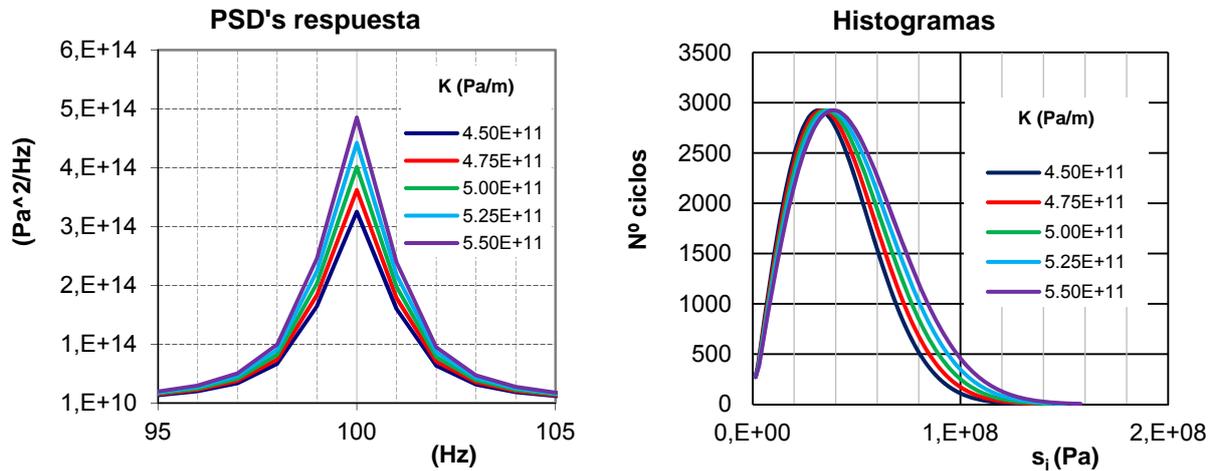
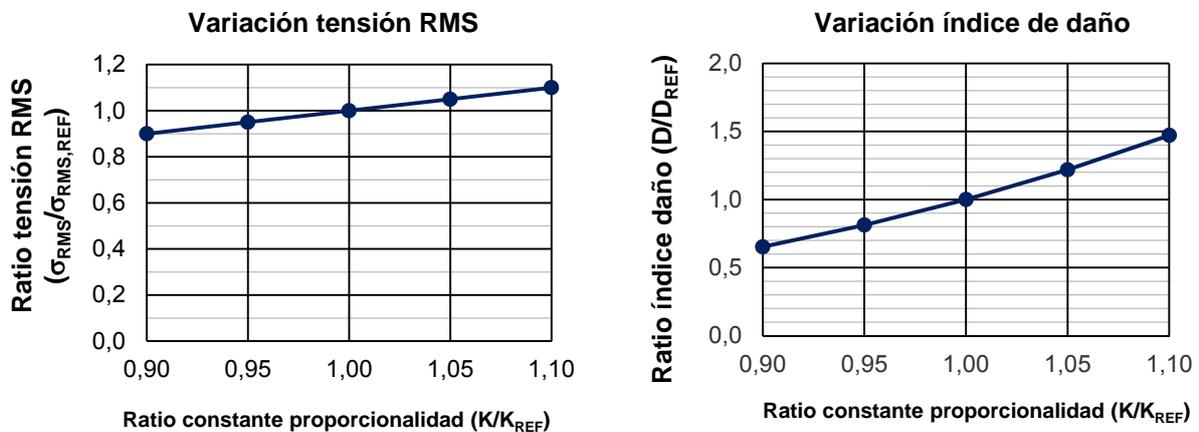


Figura 13: Variación de tensión  $\sigma_{RMS}$  e índice de daño D, al variar la constante de proporcionalidad



### 5.6 Resolución frecuencial

A la hora de llevar a cabo el análisis numérico de la respuesta del componente frente a la sollicitación vibratoria, es necesario indicar el número de puntos para los que se desea calcular la respuesta del sistema a lo largo del rango frecuencial de interés. El ratio entre el rango frecuencial de análisis y el número de puntos determinará la resolución frecuencial de la PSD de respuesta. Se muestra en la figura 14 las PSD's e histogramas obtenidos para distintos valores de resolución frecuencial y en la figura 15 cómo varían los valores de la tensión  $\sigma_{RMS}$  y del índice de daño D al variar dicho parámetro.

Figura 14: PSD's de tensiones e histogramas, al variar la resolución frecuencial

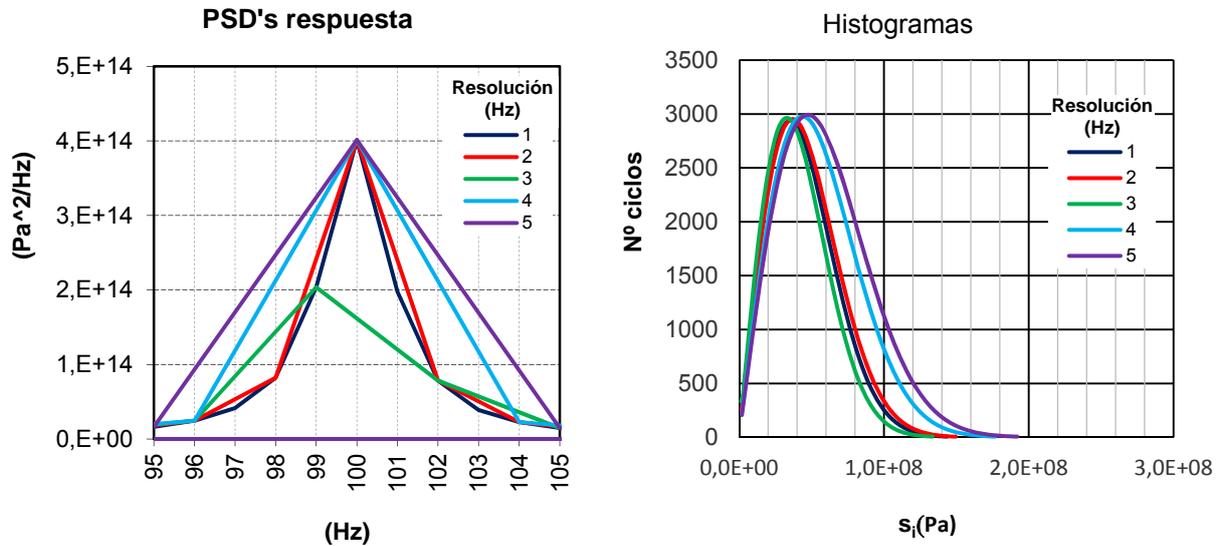
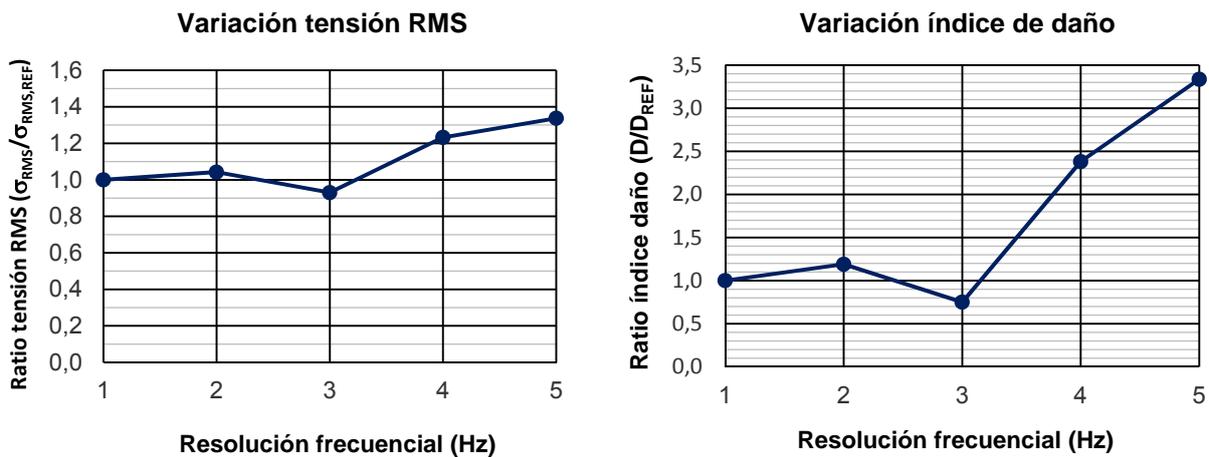


Figura 15: Variación de tensión  $\sigma_{RMS}$  e índice de daño D, al variar la resolución frecuencial



## 6. Conclusiones

De los resultados obtenidos podemos observar cómo influyen, en la determinación del índice de daño, los diversos parámetros analizados.

Así tenemos que la incertidumbre en la determinación de la frecuencia natural del sistema (Baussaron, Fouchez & Yalamos, 2013) influye tanto en el número de ciclos realizados por cada rango de tensiones, como en la amplitud de los mismos, presentando para variaciones de  $\pm 10\%$  en el valor de la frecuencia, variaciones cercanas al 50% en el índice de daño. El amortiguamiento presenta también una gran influencia sobre la determinación del índice de daño, presentando para variaciones de  $\pm 40\%$  en el valor de amortiguamiento, variaciones superiores al 200% en el índice de daño. También es reseñable la influencia que sobre el nivel de tensión máxima, producida a la frecuencia de resonancia, tiene dicho parámetro. Este aspecto puede ser el más crítico a la hora de que se pueda superar el límite elástico del material durante el tiempo en que el componente se ve sometido a dicho nivel de vibración.

La determinación de los valores de resistencia del material y de fatiga a nivel de componente presentan igualmente una gran influencia sobre la determinación del índice de daño. Así, en el primero de los parámetros, variaciones de  $\pm 10\%$  sobre el valor de resistencia a rotura del material provocan variaciones del orden del 40% sobre la determinación del índice de daño. Para el segundo de los parámetros, variaciones de  $\pm 10\%$  sobre el valor de resistencia a fatiga  $S_e$  dan lugar a variaciones del orden del 30% sobre la determinación del índice de daño.

Finalmente hay que señalar que los aspectos relacionados con el modelo numérico tienen también una gran repercusión en el resultado obtenido, siendo el de la resolución frecuencial con la que se determinan los resultados de la PSD de respuesta el más crítico (Rahman et al., 2009). Así una baja resolución puede provocar tanto un incremento en el índice de daño generado por un incremento ficticio del área bajo la curva de la PSD de respuesta, como una disminución debido a que no se obtenga la respuesta del sistema exactamente a la frecuencia de resonancia, donde se produce la mayor amplitud de tensiones.

## 7. Referencias

- Besa, A.J., Giner, E., Ródenas, J.J., Tarancón, J.E. & Valero, F.J. (2003). *Componentes de máquinas*. Madrid. Pearsons Educación, S.A.
- Baussaron, J., Fouchez, B. & Yalamas, T. (2013). Probabilistic random vibration fatigue. *Procedia Engineering*, 66, 522-529.
- Dimarogonas, A. D., & Haddad, S. (1992). *Vibration for engineers*. New Jersey. Prentice Hall, Inc.
- Dirlik, T. (1985). *Application of computers in fatigue analysis*. Tesis doctoral no publicada. University of Warwick, Coventry, England.
- Ewins, D. J. (2000). *Modal testing. Teory, practice and application (2ª ed)*. England. Research Studies Press Ltd.
- Lalanne, C. (2014). *Mechanical vibration and shock analysis. Volume 3: Random vibration (3ª ed)*. London & Hoboken. ISTE Ltd. & John Wiley & Sons, Inc.
- Lalanne, C. (2014). *Mechanical vibration and shock analysis. Volume 5: Specification development (3ª ed)*. London & Hoboken. ISTE Ltd. & John Wiley & Sons, Inc.
- Miner M. A. (1945). Cumulative Damage in Fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 67, 159-164.
- Peter, J. (2011). On estimating system damping from frequency response bandwidths. *Journal of Sound and Vibration*, 330, 6088-6097.
- Rahman, M.M., Ariffin, A.K., Jamaludin, N. & Haron, C.H.C. (2009). Finite element based vibration fatigue analysis for a new free piston engine component. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 34, 231-246.
- Rao, S. S. (1995). *Mechanical vibrations (3ª ed)*. USA. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Ruiz, J., Pelaez, J. & Martinez, A. (2003, marzo). Teorías de daño acumulativo en la fatiga. *Técnica Industrial*, 248, 30-38.
- Shigley, J. E., & Mischke, C. R. (1998). *Diseño en ingeniería mecánica (5ª ed)*. México. McGRAW-HILL.