

LA MULTIFRACTALIDAD COMO HERRAMIENTA PARA SELECCIONAR EL MEJOR ANÁLISIS DE FRECUENCIAS EN UNA DETERMINADA LOCALIDAD

Amanda García Marín

José Luís Ayuso Muñoz

Javier Estévez Gualda

Departamento de Ingeniería Rural. Universidad de Córdoba.

Francisco J. Jiménez Hornero

Departamento de Ingeniería Gráfica. Universidad de Córdoba.

Abstract

The Intensity-Duration-Frequency (IDF) curves can be obtained by analysing extreme rainfall data for a certain place. They are widely used when designing artificial drainage systems or engineering works that interfere with natural river networks. Extreme rainfall data have to be used to obtain the IDF curves for a certain place. These data have to be statistically analyzed and various methods can be applied: local frequency analysis or regional frequency analysis.

The objective of the present work is the use of the multifractal properties of rainfall for selecting the most appropriate frequency analysis in order to characterize a widely used IDF model in Spain.

Keywords: Rainfall, Frequency Analysis, IDF curves, Multifractality

Resumen

Las curvas Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF) son herramientas ampliamente utilizadas para diseñar sistemas de drenaje artificiales o para trabajos y obras de ingeniería que interfieren con las redes de drenaje naturales. Para obtener las curvas IDF de una determinada localidad se utilizan datos extremos de precipitación de la misma. Dichos datos habrán de analizarse desde un punto de vista estadístico, existiendo para ello varias posibilidades, entre ellas, el análisis local y el análisis regional de frecuencias.

El objetivo de este trabajo es utilizar las propiedades multifractales de la lluvia para seleccionar el análisis de frecuencias más apropiado a la hora de obtener los parámetros de una de las curvas IDF más ampliamente usada en el territorio español.

Palabras clave: Precipitación, Análisis de frecuencias, curvas IDF, Multifractalidad

1. Introducción

Para resolver muchos problemas en ingeniería civil han de estimarse valores de precipitación máxima para valores de período de retorno normalmente impuestos por las distintas normativas. Para obtener dichos cuantiles se recurre a las curvas Intensidad-Duración-Frecuencia (IDF). Estas expresiones permiten calcular la tormenta de diseño o valor esperado de precipitación para una duración y probabilidad de ocurrencia determinadas (Di Baldassarre et al., 2006). Las curvas IDF se determinan mediante análisis estadístico de series de datos extremos de precipitación procedentes de estaciones meteorológicas (Ben_Zvi, 2009), aunque algunos métodos permiten construir las relaciones IDF en localidades sin registros (Pao-Shan-Yy et al., 2004). Las series de datos han de someterse a análisis de frecuencias para posteriormente obtener los cuantiles que se ajustarán al modelo paramétrico elegido. Tradicionalmente se utiliza el Análisis Local (AL) de frecuencias, si bien, los cuantiles obtenidos para elevados períodos de retorno pueden no ser representativos si se trabaja con muestras pequeñas.

Como alternativa al AL puede usarse el Análisis Regional (AR) de frecuencias (Hosking y Wallis, 1997). Mediante esta técnica, se suple la carencia de datos en el tiempo con el aumento de datos en el espacio.

El escalado de las curvas IDF es una característica ampliamente estudiada en los últimos años (e.g. Veneziano y Furcolo, 2002; Langousis y Veneziano, 2007). Autores como Schertzer y Lovejoy (1987, 1996) y Veneziano y Furcolo (2002), han obtenido relaciones de escala para la probabilidad de excedencia de medidas multifractales estacionarias, cuya generalización es la base para relacionar la multifractalidad de la lluvia con las propiedades de escala de las curvas IDF.

El objetivo de este trabajo es utilizar las propiedades multifractales de la lluvia para seleccionar el análisis de frecuencias más apropiado a la hora de obtener los parámetros de la ecuación de Témez en Málaga (Andalucía, Sur de España).

2. Metodología

2.1. Análisis de frecuencias

El objetivo fundamental del análisis de frecuencias es la estimación de sucesos extremos correspondientes a diversos períodos de retorno mediante el uso de funciones de distribución de probabilidad. La función de distribución de valores extremos tipo I o de Gumbel es una de las más utilizadas en el análisis local de frecuencias de variables hidrológicas extremas siendo su función acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-e^{\alpha(x-\beta)}} \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (1)$$

Los valores de α y β caracterizan a la función para cada serie de datos máximos que se analice.

Como alternativa al AL se presenta el AR que permite calcular datos para un determinado sitio utilizando datos de otros lugares diferentes a los del sitio en cuestión. Si se cuenta con N sitios cada uno de ellos con n años de registro de eventos máximos, puede suponerse que NxN datos darán estimaciones más precisas de cuantiles tan extremos como $Q_{N/n}$ (Hosking y Wallis, 1997). El AR utiliza el método del Índice de Avenida y el estudio de los momentos lineales para obtener el valor de los cuantiles buscados. El método del índice de avenida se aplicó por primera vez a datos hidrológicos de grandes avenidas (Dalrymple, 1960) de ahí su nombre. Los momentos lineales constituyen un sistema alternativo al método tradicional de los momentos convencionales para describir las formas de las

funciones de distribución y surgen como combinaciones lineales de los momentos ponderados probabilísticos introducidos por Greenwood et al. (1979).

El AR consta básicamente de cinco etapas:

- a) Identificación de regiones homogéneas. La primera prueba estadística consiste en la medida de la discordancia, que permite identificar estaciones inusuales dentro de la posible región de estudio. En función del número de estaciones los límites de discordancia varían. Una vez determinadas y excluidas del análisis en su caso las estaciones discordantes, el siguiente paso consiste en determinar la homogeneidad de la región. Para ello ha de calcularse el valor del estadístico H . Una región podrá considerarse homogénea si $H < 1$, posiblemente heterogénea si $1 \leq H < 2$, y heterogénea para valores de H superiores a 2 (Hosking y Wallis, 1997).
- b) Elección de una distribución de frecuencias para la región. El siguiente paso consiste en ajustar todos los datos de la región homogénea a una misma función de distribución de probabilidad. Generalmente no existe una única distribución posible, por lo que habrá que evaluar la bondad del ajuste. Para ello se utiliza el estadístico Z^{DIST} . Se considera que el ajuste de una determinada distribución es adecuado si el valor absoluto de Z^{DIST} es menor o igual a 1.64 (Hosking y Wallis, 1997).
- c) Análisis de robustez. Se utiliza el método de simulación de Montecarlo para obtener los valores se sesgo y de raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE) para cada función de distribución. Según Hosking y Wallis (1997) es este último valor la mejor medida de precisión.
- d) Estimación de los cuantiles regionales de frecuencia. Para cada una de las N estaciones de la región se determinan los cuatro primeros momentos lineales adimensionalizándolos posteriormente al dividir cada uno de ellos por la media de la serie de datos. Con ellos se caracteriza la función de distribución acumulada, y mediante el índice de avenida se obtienen los cuantiles para cada una de las estaciones de la región.

2.2. Curvas IDF

Existen muchos modelos paramétricos que relacionan la intensidad media de lluvia con su duración y su probabilidad de ocurrencia. En España, una de las más utilizadas es la propuesta por Téméz (1987) y presenta la forma:

$$i = ab^{(28^{0.1} - t^{0.1})2.5} \quad (2)$$

Para ajustar los cuantiles de precipitación a cualquier modelo paramétrico puede usarse el método de mínimos cuadrados (Chow et al., 1988), realizándose ajustes independientes para cada período de retorno.

2.3. Multifractalidad y curvas IDF

Según Sivakumar (2001), el método más apropiado para identificar la multifractalidad es el del escalado de momentos estadísticos (Frisch y Parisi, 1985; Schertzer y Lovejoy, 1987; Over y Gupta, 1994). El escalado de momentos de la intensidad de lluvia puede describirse por la función $K(q)$,

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (3)$$

donde $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$ es el q -ésimo momento conjunto del proceso para una resolución λ . La función $K(q)$ puede considerarse una función una función característica del comportamiento fractal

del proceso. Si la representación de $K(q)$ frente a q es básicamente una línea recta, el proceso será monofractal. Si la representación es una función convexa, se estaría frente a un proceso multifractal (Parisi y Frisch, 1985).

Según Veneziano y Furcolo (2002), el valor de la singularidad máxima (γ_{max}) asociado al valor del momento crítico q_D en la función exponente empírica escaladora de momentos $K(q)$ puede relacionarse con el valor de la pendiente de las curvas IDF de un determinado lugar ajustadas para una hora y determinados períodos de retorno. Así, el valor de la pendiente de la curva correspondiente a cada período de retorno debe estar próximo al valor de (γ_{max}) obtenido para la misma localidad.

De igual forma, si se representa en un diagrama doblemente logarítmico la relación entre los valores de intensidad media de lluvia para un determinado valor de período de retorno, debe obtenerse una línea recta cuya pendiente ha de ser próxima a $1/q_D$.

3. Datos

Se dispone de series de datos históricas de precipitación suministradas por la Agencia Estatal de Meteorología para las cuatro capitales de Andalucía Oriental: Málaga, Almería, Jaén y Granada. Las series de precipitaciones máximas anuales para duraciones que oscilan entre 10 minutos y 24 horas, se utilizarán para llevar a cabo un Análisis Regional de precipitaciones máximas. De igual forma se realizará un Análisis Local de las precipitaciones máximas para las mismas duraciones en Málaga. Los cuantiles obtenidos mediante ambos procedimientos para esta localidad, se ajustarán posteriormente el modelo de curva IDF propuesto por Téméz. Con todos los datos horarios disponibles en Málaga se realizará un análisis multifractal para obtener los parámetros que posteriormente permitirán discriminar entre el mejor análisis de frecuencias.

4. Resultados

4.1. Análisis de frecuencias

Con las series de datos máximos de precipitación para distintas duraciones en Andalucía Oriental se ha realizado un análisis regional de frecuencias. Ninguna de las estaciones resultó discordante para las duraciones estudiadas. Los valores del estadístico H se muestran en la tabla 1, donde puede verse que para todas las duraciones Andalucía Oriental puede considerarse una región homogénea ($H < 1$) o posiblemente heterogénea ($1 \leq H < 2$). Según Hosking y Wallis (1997) con valores de H inferiores a 2 puede aceptarse la homogeneidad de la región. Para una duración de 24 horas, H es prácticamente igual a 2, por lo que se incluye esta duración en la consideración de homogeneidad.

Tabla 1: Valor del estadístico H para Andalucía Oriental

Duración	10min	20min	30min	1h	2h	3h	6h	12h	24h
And.Oriental	1,02	0,01	-0,03	0,54	1,27	1,13	1,49	0,75	2,01

Atendiendo al valor del estadístico Z^{DIST} (Tabla 2) las dos funciones que pueden proporcionar un mejor ajuste para todas las duraciones son la función Pearson Tipo III y la función Pareto Generalizada. La tabla 3, muestra los valores de RMSE para ambas funciones, siendo la función Pearson Tipo III la que da mejores resultados. Será esta por lo

tanto la función que se utilice para obtener los cuantiles regionales de precipitación máxima para distintas duraciones en Málaga (Tabla 4).

Tabla 2: Valor del estadístico Z^{DIST} para Andalucía Oriental

Z^{DIST}	DURACIÓN (minutos)								
FUNCIÓN	10	20	30	60	120	180	360	720	1.440
LOGGEN	3,18	2,62	2,44	1,94	0,91	0,75	1,12	0,58	1,38
GEV	2,31	1,89	1,76	1,37	0,51	0,30	0,51	-0,02	0,52
NORGEN	1,97	1,49	1,34	0,92	0,04	-0,12	0,15	-0,34	0,30
PT3	1,35	0,79	0,61	0,15	-0,74	-0,84	-0,48	-0,92	-0,15
PARGEN	0,21	0,03	0,00	-0,18	-0,70	-0,98	-1,05	-1,53	-1,46

Tabla 3: Valor RMSE para las funciones en estudio

Duración (min)	Pearson	Pareto
10	0,995	1,066
20	0,849	0,960
30	0,868	0,918
60	0,956	1,016
120	1,154	1,177
180	1,116	1,146
360	1,015	1,035
720	0,964	0,987
1440	0,868	0,884

La tabla 5 muestra los cuantiles que se obtienen al realizar un ALF con las series de precipitaciones máximas en Málaga mediante la función de distribución de Gumbel.

Tabla 4: Alturas de lluvia obtenidas mediante AR

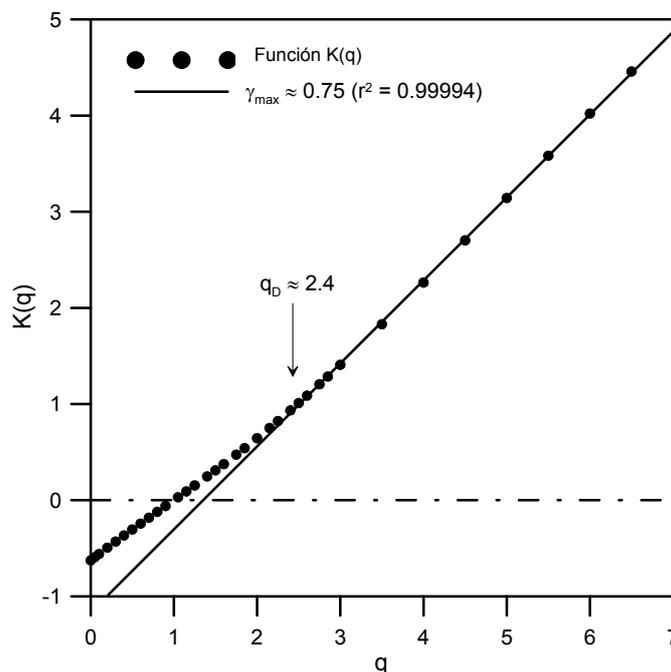
Málaga		Período de retorno (años)							
t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25	50
10	10,64	13,66	15,55	17,02	21,40	23,57	25,58	26,91	30,94
20	15,07	19,60	22,48	24,73	31,51	34,90	38,07	40,14	46,53
30	17,77	23,27	26,78	29,55	37,91	42,12	46,04	48,63	56,58
60	21,27	28,00	32,36	35,80	46,26	51,55	56,51	59,77	69,84
120	29,19	38,04	43,94	48,67	63,35	70,89	78,00	82,71	97,35
180	33,54	43,30	49,71	54,81	70,50	78,50	86,02	90,99	106,37
360	44,18	55,65	62,93	68,62	85,75	94,32	102,30	107,55	123,65
720	49,92	62,95	71,21	77,68	97,15	106,90	115,97	121,94	140,25
1.440	54,64	67,78	75,97	82,34	101,25	110,62	119,31	125,00	142,39

Tabla 5: Alturas de lluvia obtenidas mediante AL

Málaga		Período de retorno (años)							
t (min)	2	3	4	5	10	15	20	25	50
10	10,99	14,47	16,70	18,35	23,22	25,97	27,89	29,37	33,94
20	15,86	20,96	24,22	26,64	33,78	37,81	40,63	42,80	49,49
30	18,86	25,05	29,01	31,94	40,60	45,48	48,90	51,54	59,65
60	23,81	31,04	35,67	39,10	49,22	54,93	58,93	62,01	71,50
120	31,89	42,33	49,02	53,96	68,58	76,83	82,60	87,05	100,75
180	35,97	47,74	55,27	60,84	77,30	86,59	93,10	98,11	113,54
360	46,16	58,96	67,16	73,22	91,14	101,25	108,33	113,78	130,58
720	52,34	66,47	75,51	82,20	101,97	113,13	120,94	126,95	145,49
1.440	66,28	82,13	92,28	99,79	121,98	134,49	143,26	150,01	170,81

4.2. Análisis multifractal de la lluvia horaria en Málaga

La figura 1 muestra la representación de la función $K(q)$. Como puede verse, su forma es básicamente convexa, lo que implica la multifractalidad de los datos de lluvia horaria analizados en Málaga. El valor obtenido para el momento crítico es de 2.4 mientras que la singularidad asociada al mismo es de 0.75. Estos dos últimos valores serán los que se comparen con las características de las curvas IDF obtenidas para Málaga con los datos procedentes tanto del ARF como del ALF.

Figura 1: Función $K(q)$ para la lluvia horaria en Málaga

4.3. Curvas IDF y multifractalidad

La tabla 6 muestra el valor de los parámetros a y b para la ecuación propuesta por Témez (1987) para varios períodos de retorno y para cada análisis de frecuencias realizado. Una vez ajustadas las curvas, puede obtenerse el valor de la pendiente de la recta a la que se ajustan los valores de intensidad media de lluvia para diversas duraciones.

Tabla 6: Parámetros de la curva IDF

	AR		AL		
	a	b	a	b	
	2	36,440	5,281	38,581	4,959
	3	47,279	5,186	50,866	4,971
	4	54,184	5,118	58,729	4,977
	5	59,602	5,066	64,552	4,980
T	10	75,930	4,929	81,746	4,986
	15	84,111	4,869	91,448	4,989
	20	91,736	4,819	98,236	4,989
	25	96,761	4,791	103,466	4,989
	50	112,166	4,709	119,585	4,993

La tabla 7 muestra para cada tipo de análisis el valor obtenido al sumar el cuadrado de las diferencias entre el valor de la singularidad (0.75) y la pendiente de la curva IDF para cada período de retorno. Como puede verse, el mejor resultado es el obtenido para el AR.

Tabla 7: Diferencias entre la singularidad máxima y las pendientes de las curvas IDF

$\sum (\gamma_{\max} - Pte.IDF_{T_i})^2$	
AR	AL
0,00871	0,01043

La tabla 8 recoge las diferencias en valor absoluto entre el valor de la pendiente de la recta obtenida al ajustar los datos procedentes de cada tipo de análisis y el recíproco del momento crítico q_D . De esta forma puede discriminarse con más precisión el mejor tipo de análisis de frecuencias a la hora de ajustar en Málaga la ecuación IDF seleccionada en este trabajo. El AR vuelve a ser nuevamente el más adecuado.

Tabla 8: Valor absoluto de la diferencia entre las pendientes de las curvas y el valor del momento crítico

$ (pte_{curva}) - (1/q_D) $	
AR	AL
0,017	0,007

5. Conclusiones

A la vista de todos los resultados anteriores queda patente la importancia que tiene la naturaleza multifractal de la precipitación a la hora de analizarla. Las curvas IDF en cualquiera de sus formas deben también reproducir, o al menos, mostrar cierta similitud con determinados parámetros relacionados con esa naturaleza multifractal de la lluvia.

De los dos métodos de análisis de frecuencias utilizados para obtener los cuantiles de lluvia para diversas duraciones y períodos de retorno, el análisis regional de frecuencias ha resultado ser el método más preciso desde el punto de la multifractalidad de la lluvia en Málaga.

Por lo tanto, el análisis multifractal de la precipitación puede considerarse una herramienta eficaz para discriminar el mejor método de análisis de frecuencias en una determinada localidad.

Referencias

- Ben-Zvi, A. 2009. Rainfall intensity-duration-frequency relationships derived from large partial duration series. *Journal of Hydrology* 367: 104-114
- Chow VT, Maidment DR, Mays LW. 1988. *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- Dalrymple T. 1960. Flood frequency analysis. *USGS. Water Supply Paper* 1543-A.
- de Lima MIP. 1998. *Multifractals and the temporal structure of rainfall*. Ph.D Thesis,
- Di Baldassarre G, Brath A, Montanari A. 2006. Reliability of different depth-duration-frequency equations for estimating short-duration design storms. *Water Resources Research* 42, W12501, doi: 10.1029/2006WR004911
- Frisch U, Parisi G. 1985. On the singularity structure of fully developed turbulence. In *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Ghil M, Benzi R, Parisi G (eds). North-Holland: New York; 84-88.

- Greenwood J, Landwehr J, Matalas N, Wallis J. 1979. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressed in inverse form. *Water Resources Research* 15(6): 1049-1054.
- Hosking JRM, Wallis JR. 1997. Regional frequency analysis. *Cambridge University Press*. 224 pp
- Langousis A, Veneziano D. 2007. Intensity-duration-frequency curves from scaling representations of rainfall. *Water Resources Research*. 43, W02422, doi: 10.1029/2006WR005245
- Over TM, Gupta VK. 1994. Statistical analysis of mesoscale rainfall: dependence of a random cascade generator on large scaling forcing. *Journal of Applied Meteorology*, 33, 1526-1543.
- Parisi G, Frisch U. 1985. Fully developed turbulence and intermittency Proc. International School of Physics Enrico Fermi, Course LXXXVIII, Italian Physical Society. In: Ghil, M., Benzi, R., Parisi, G. (Eds.). *Turbulence and predicability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, North-Holland, Amsterdam.
- Pao-Sahn Y., Tao-Chang Y., Chin-Sheng L. 2004. Regional rainfall intensity formulas based on scaling property of rainfall. *Journal of Hydrology*. 295: 108-123.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres* 92: 9693-9714.
- Schertzer D, Lovejoy S. 1996. Resolution dependence and multifractals in remote sensing and geographical information systems, Lecture Notes, McGill Univ., Montreal, Ontario, Canada
- Sivakumar B. 2001. Is a chaotic multi-fractal approach for rainfall possible? *Hydrological Processes* 15: 943-955, (with a minor correction in *Hydrological Processes* 15: 2381-2382).
- Témez JR. 1987. Cálculo hidrometeorológico de caudales máximos en pequeñas cuencas naturales. Dirección general de carreteras. MOPU. Madrid.
- Veneziano D, Furcolo P, 2002. Multifractality of rainfall and scaling of intensity-duration-frequency curves. *Water Resources Research* 38 (12), doi: 10.1029/2001WR000372

Correspondencia

Amanda García Marín
Correo electrónico : amanda.garcia@uco.es