

APLICACIÓN DE MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN DE DISEÑO BASADA EN FIABILIDAD A ESTRUCTURAS CON CARGAS ALEATORIAS CORRELACIONADAS

Luis Celorrio-Barragué
Eduardo Martínez-de-Pisón
Carmen Bao-Iturbe
F. J. Martínez-de-Pisón
Julio Fernández-Ceniceros

Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad de La Rioja

Abstract

A deterministic optimization does not account for the uncertainties in the design variables and parameters. Modern competitive market demands have required the designers to introduce techniques to obtain optimized designs that are also reliable. In the past twenty-five years, researchers have proposed a variety of methods to obtain optimum and reliable designs. These methods are addressed in Reliability-Based Design Optimization (RBDO). There are various types of RBDO approaches: Double-Loop methods, Decoupled methods and Single-Loop methods. This paper studies the efficiency of several RBDO approaches applied to problems with dependent non-normal random input variables. Usually, the joint cumulative distribution function of this random vector is seldom available, and it is only characterized reliably up to the marginal distributions and a measure of dependence between such as the linear correlation matrix. Thus, Nataf transformation can be used with dependent random variables in RBDO problems.

Several RBDO approaches are applied to a ten bar truss. The numerical efficiency and convergence are checked.

Keywords: *Structural Reliability, Reliability Based Design Optimization, Nataf Transformation, Copulas, Correlated random variables*

Resumen

Un método de diseño realista tiene que considerar las incertidumbres en las variables de diseño y en los parámetros de la estructura. Un mercado tan competitivo y globalizado como el actual exige que los diseñadores utilicen métodos adecuados para obtener diseños que sean óptimos y que, además, sean fiables. Estos métodos son tratados en el campo de la Optimización de Diseño Basada en Fiabilidad (RBDO). Existen varios grupos de métodos RBDO: Métodos de Doble Lazo, Métodos Desacoplados, Métodos de Lazo Único. Este artículo estudia la eficiencia de estos métodos aplicados a problemas estructurales caracterizados por variables aleatorias dependientes y, en general, no normales. Generalmente, la función de distribución conjunta de este vector aleatorio no es conocida. En la práctica, lo más que se llega a disponer para un vector de variables aleatorias son las distribuciones marginales y una medida de la dependencia entre ellas tal como la matriz de coeficientes de correlación lineal. Con esta información disponible sólo es posible aplicar la transformación de Nataf para resolver el problema de optimización de diseño probabilista.

En este artículo se aplican diferentes métodos RBDO al diseño de una estructura. Se comprobará la eficiencia y convergencia de estos métodos.

Palabras clave: *Fiabilidad Estructural, Diseño Óptimo Basado en Fiabilidad, Transformación de Nataf, Cópulas, Variables Dependientes*

1. Introducción

En los últimos años el proceso de optimización de diseño ha experimentado un progreso sustancial. Los programas de elementos finitos comerciales han añadido nuevas capacidades y han incorporado métodos de optimización. Sin embargo, sólo permiten considerar parámetros deterministas. En cualquier diseño real intervienen parámetros que verdaderamente son variables inciertas. Estas incertidumbres tienen que considerarse en la fase de diseño de cualquier sistema de ingeniería para asegurar su fiabilidad y calidad. Tradicionalmente, estas incertidumbres se han considerado de forma indirecta mediante el uso de coeficientes de seguridad empíricos. El inconveniente más importante de estos coeficientes es que no proporcionan una medida cuantitativa de la influencia que tienen las diferentes variables de diseño y de las incertidumbres asociadas a las mismas sobre la prestación global del sistema.

Para llevar a cabo de forma racional un diseño es crucial el tener en cuenta todas las incertidumbres existentes: incertidumbres en propiedades de los materiales, en las cargas o acciones o en la geometría, así como la incertidumbre en el modelo matemático utilizado para representar su comportamiento, producida por falta de un conocimiento completo del problema. Estas incertidumbres se caracterizan, en general, mediante variables aleatorias. Un aspecto muy importante, que muchas veces no se tiene en cuenta, es la posible dependencia o correlación entre estas variables.

La Optimización de Diseño Basada en Fiabilidad (RBDO, del inglés "Reliability Based Design Optimization") estudia problemas de diseño en los que se trata de obtener el mínimo de cierta función objetivo sujeta a unas restricciones que son probabilistas, puesto que intervienen variables aleatorias.

El fin de RBDO es obtener un diseño que minimice determinada función objetivo asegurando la fiabilidad adecuada. Existen diversas formulaciones de problemas de optimización bajo incertidumbre, dependiendo del tipo de función objetivo y de las restricciones. En el caso del diseño de estructuras la formulación más habitual consiste en minimizar una única función objetivo, el peso del diseño o estructura, sujeto a restricciones de fiabilidad a nivel de componente. En los últimos 25 años se han propuesto varios métodos para resolver este problema de optimización probabilista. Los investigadores han tratado de buscar métodos eficientes y robustos que eviten el alto coste computacional y las dificultades de convergencia de los métodos iniciales.

En los problemas de ingeniería, puede ocurrir que las variables aleatorias de entrada sigan distribuciones de probabilidad diferentes (Normal, Lognormal, Weibull, Gumbel, etc). Además, dos variables aleatorias de entrada pueden estar correlacionadas. Así, por ejemplo, las propiedades del material y las propiedades de fatiga son variables aleatorias correlacionadas (Socie, 2010). Por tanto, un buen método de RBDO debe contemplar estas situaciones. Para el tratamiento de las variables aleatorias no normales correlacionadas se emplea habitualmente la transformación de Nataf (1962). En este artículo se estudian diferentes métodos de RBDO y se aplican a una estructura de nudos articulados de 10 barras sometida a cargas correlacionadas. Los resultados se verifican mediante Simulación de Monte Carlo con Muestreo por Importancia. Finalmente se presentan las conclusiones.

2. Formulación del problema RBDO

La formulación típica de un problema RBDO se escribe como

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X} f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_P) \\ & \text{s.a. } P_{fi} = P[g_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq 0] \leq P_{fi}^t, \quad i = 1, \dots, n \\ & \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U, \quad \boldsymbol{\mu}_X^L \leq \boldsymbol{\mu}_X \leq \boldsymbol{\mu}_X^U \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathbf{d} \in R^k$ es el vector de variables de diseño deterministas, $\mathbf{X} \in R^m$ es el vector de variables de diseño aleatorias, $\mathbf{P} \in R^q$ es el vector de parámetros de diseño, $f(\cdot)$ es la función objetivo, n es el número de restricciones, k es el número de variables de diseño deterministas, m es el número de variable de diseño aleatorias y q es el número de parámetros aleatorios, P_{fi} es la probabilidad de que se viole la restricción probabilística i -ésima y P_{fi}^t es la probabilidad de fallo objetivo para la restricción probabilística i -ésima.

En las aplicaciones prácticas de RBDO la determinación de las probabilidades de fallo P_{fi} de las restricciones se lleva a cabo mediante el Método de Fiabilidad de Primer Orden (FORM). Este método implica realiza una transformación de las variables aleatorias desde el espacio original (\mathbf{X}, \mathbf{P}) al espacio normal estándar (\mathbf{U}) de la forma $\mathbf{U} = T(\mathbf{X}, \mathbf{P})$. La imagen de la función de prestación $g_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ es $G_i(\mathbf{d}, T(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u})$. La probabilidad de fallo P_f de una restricción probabilista está dada como una función del índice de fiabilidad de la restricción β , mediante:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (2)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución Gaussiana acumulada y β es el índice de fiabilidad definido por Hasofer y Lind (1974) que se evalúa resolviendo el problema de optimización restringida siguiente:

$$\begin{aligned} & \beta = \min \|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} \\ & \text{s.a. : } G(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

La solución de este problema de optimización \mathbf{u}^* es la distancia mínima desde el origen del espacio normal estándar \mathbf{U} a un punto \mathbf{u} sobre la superficie de fallo $G(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = 0$ y se llama punto de fallo más probable (MPP) o punto β puesto que $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$. Para el cálculo de \mathbf{u}^* y β es necesario realizar una transformación probabilista $\mathbf{U} = T(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ entre el espacio original de las variables aleatorias (\mathbf{X}, \mathbf{P}) y el espacio de variables normales estandarizadas \mathbf{U} . En el caso de que existan variables aleatorias de entrada correlacionadas la transformación que se usa es la Transformación de Nataf. La imagen de la función de prestación $g_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ es $G_i(\mathbf{d}, T(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u})$.

El proceso de optimización de la ecuación (1) se desarrolla en el espacio de los parámetros de diseño $(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X)$. En paralelo, la solución del problema de fiabilidad de la

ecuación (3) se desarrolla en el espacio de las variables aleatorias normales estandarizadas. La manera natural de realizar este proceso de optimización es mediante un procedimiento iterativo de doble lazo: en el lazo interno se desarrolla el análisis de fiabilidad de las restricciones probabilistas para cada cambio en las variables de diseño en el lazo externo.

3. Métodos de RBDO

El método tradicional de doble lazo implica un alto coste computacional. Debido a ello los investigadores han desarrollado varios métodos que tratan de solventar estas dificultades numéricas. Estos métodos de RBDO se pueden clasificar de tres grandes grupos: métodos de doble lazo avanzados, métodos desacoplados y métodos de lazo único.

3.1 Métodos de doble lazo avanzados

Estos métodos RBDO se basan en mejoras del método de doble lazo tradicional que aumentan la eficiencia, especialmente en el lazo interno de análisis de fiabilidad. Existen dos maneras de realizar el análisis de fiabilidad: análisis de fiabilidad directa mediante el método basado en Índice de Fiabilidad (RIA) y análisis de fiabilidad inversa mediante el Método basado en Medida de Prestación (PMA). El método tradicional de doble lazo de RBDO está basado en RIA y se aplica a problemas formulados como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X} f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_P) \\ \text{s.t. } \beta_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \geq \beta_i^t, \quad i = 1, \dots, n \\ \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U, \quad \boldsymbol{\mu}_X^L \leq \boldsymbol{\mu}_X \leq \boldsymbol{\mu}_X^U \end{aligned} \quad (4)$$

donde β_i es el índice de fiabilidad de la restricción probabilista i -ésima y β_i^t es el índice de fiabilidad objetivo o admisible. El cálculo del índice de fiabilidad β_i implica el resolver el problema de optimización dado en la ecuación (3). Para ello se pueden usar tanto métodos de optimización no lineal restringida estándar o métodos FORM, como el método de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiesler (HLRF) o el método HLRF mejorado.

Lee y Kwak (1987) y Tu et al. (1999) propusieron el uso del Método basado en Medida de Prestación en lugar del ampliamente usado RIA. En PMA, no es necesario determinar el valor exacto de la probabilidad de fallo de una restricción sino que se trata de buscar el punto con el menor valor de función de prestación que esté situado sobre una hipersfera cuyo radio está determinado por el índice de fiabilidad objetivo β^t . Puesto que el análisis de fiabilidad inverso se realiza también iterativamente, los lazos de análisis de fiabilidad y de optimización también están anidados.

El problema RBDO basado en PMA se expresa como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X} f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_P) \\ \text{s.t. } G_{pi} = F_G^{-1}[\Phi(-\beta_i)] \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U, \quad \boldsymbol{\mu}_X^L \leq \boldsymbol{\mu}_X \leq \boldsymbol{\mu}_X^U \end{aligned} \quad (5)$$

donde la medida de prestación G_p se obtiene a partir del siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} G_p &= \min_{\mathbf{u}} G(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ \text{s.t. } &\|\mathbf{u}\| = \beta_t \end{aligned} \quad (6)$$

El punto \mathbf{u}^{**} solución de este problema se conoce como el MPP de fiabilidad inversa o MPPIR.

B.D. Youn ha desarrollado varios métodos avanzados de RBDO basados en PMA. Estos métodos son el método de Valor Medio Híbrido (HMV), el método de Valor Medio Híbrido Avanzado (HMV+) (Youn et al., 2005a) y el método basado en Medida de Prestación Enriquecido (PMA+) (Youn et al., 2005b), que se describen brevemente. El método HMV es una combinación de los métodos de Valor Medio Avanzado y de Valor Medio Conjugado y proporciona resultados precisos para restricciones de fiabilidad no lineales cóncavas y convexas. Sin embargo, el método HMV podría fallar y no converger cuando las funciones de prestación son altamente no lineales. El método HMV+ propuesto por B.D. Youn mejora la eficiencia numérica y es más estable para funciones de prestación con graves no linealidades. Este método introduce una aproximación mediante interpolación para mejorar la búsqueda del MPP de fiabilidad inversa. El método PMA+ es el método basado en Medida de Prestación enriquecido con el fin de mejorar la eficiencia numérica. El método PMA+ utiliza el método HMV+ añadiendo las siguientes estrategias: arrancar el proceso RBDO en el diseño óptimo determinista, comprobar la factibilidad de las restricciones y realizar un análisis más preciso de las restricciones violadas, activas o próximas a activarse y realizar un análisis de fiabilidad inversa rápido cuando se tengan que los diseños consecutivos están muy próximos, tomando como punto de inicio en la búsqueda del MPPIR del ciclo actual el MPPIR del ciclo anterior.

3.2 Métodos desacoplados

Estos métodos RBDO se caracterizan porque el problema de optimización y la valoración de la fiabilidad están desacoplados y se desarrollan secuencialmente. Las restricciones de fiabilidad se sustituyen por restricciones deterministas equivalentes. Entre estos métodos uno de los más usados es el método de Du y Chen (2004). Estos autores proponen un método de optimización secuencial y valoración de fiabilidad (SORA). Este método emplea una estrategia desacoplada. En cada ciclo, la optimización de diseño y la valoración de fiabilidad están desacopladas, de forma que no se requiere ninguna valoración de fiabilidad dentro de la optimización y la valoración de fiabilidad se desarrolla después de la optimización. El concepto clave es usar la información sobre fiabilidad obtenida en el ciclo previo para desplazar el contorno de las restricciones deterministas violadas (con baja fiabilidad) a la región factible.

3.3 Métodos de lazo único

Estos métodos RBDO colapsan los problemas de optimización y fiabilidad dentro de un lazo único que tiene como variables a determinar tanto variables de diseño como variables aleatorias. El primer intento de un verdadero método de lazo único fue el método de lazo-único vector-único (SLSV) (Chen et al., 1997) y (Wang y Kodiyalam, 2002). Este método mejora la eficiencia computacional del RBDO eliminando los lazos de fiabilidad internos. Sin embargo, requiere de la aplicación de una estrategia de conjunto de restricciones activo para identificar las restricciones activas que puede limitar su practicidad.

Liang et al. (2008) han desarrollado una formulación RBDO de lazo único. Este método tiene una ventaja principal: elimina los lazos de fiabilidad repetidos sin aumentar el número de variables de diseño o añadir restricciones de igualdad. Las condiciones de optimalidad de KKT de los lazos de fiabilidad internos se usan explícitamente para pasar del espacio normal estándar U al espacio original X , en el que se evalúan las restricciones de desigualdad del lazo externo de optimización de diseño. Esto convierte el problema de optimización probabilista en un problema de optimización determinista. Este método estima el MPP de cada restricción probabilista usando la información del gradiente de la iteración anterior. Por tanto, elimina el lazo interno de análisis de fiabilidad del método de doble lazo tradicional.

Sin embargo, los métodos de lazo único tienen un gran inconveniente que no presentan los métodos anteriores y es que no calculan los MPP sino que los estiman y esto puede dar lugar a falta de convergencia en el caso de funciones de prestación no lineales.

4. Aplicabilidad de los métodos de RBDO para variables aleatorias de entrada dependientes.

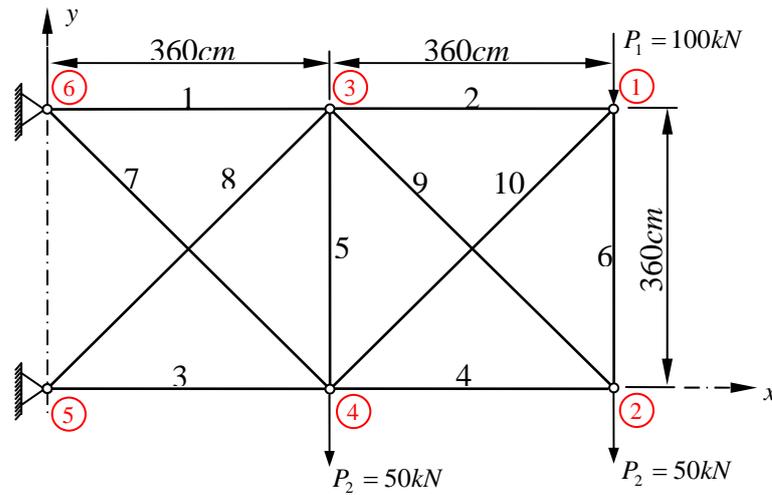
Se analiza en esta sección la capacidad que tienen los métodos de RBDO para tratar problemas en los que las variables aleatorias de entrada tengan distintas distribuciones y sean dependientes. Los métodos RBDO en los que el análisis de fiabilidad se realiza mediante FORM deben incorporar una transformación probabilista. Esta transformación toma como origen el espacio de variables de entrada X que, en el caso más general, está formado por variables no normales y dependientes y como destino el espacio normal estandarizado U . La transformación de Rosenblatt (1952) y la transformación de Nataf (1962) son las transformaciones más representativas para variables de entrada correlacionadas. La transformación de Rosenblatt precisa el conocimiento de la función de distribución acumulada (CDF) conjunta de las variables aleatorias de entrada.

Sin embargo esta CDF conjunta raramente está disponible en las aplicaciones prácticas en ingeniería estructural. Generalmente, la única información disponible en la práctica está compuesta por las CDFs marginales y la matriz de correlación lineal de las variables aleatorias de entrada. Cuando sólo se disponga de esta información es posible utilizar la transformación de Nataf. Esta transformación se ha implementado en métodos de doble lazo y desacoplados. Los métodos de lazo único no son adecuados para tratar variables de entrada no normales correlacionadas.

5. Ejemplo: estructura articulada de 10 barras

La estructura de 10 barras mostrada en la figura 1 se usa ampliamente en el área de optimización estructural. El problema de optimización aquí consiste en minimizar el peso de la estructura sujeta a restricciones de desplazamientos, tensiones y pandeo a nivel de barra. La estructura está soportando cargas aleatorias correlacionadas modeladas mediante distribuciones lognormales. El valor medio de la primera es $P_1 = 100kN$ y está aplicada en el nudo 1 y el valor medio de la segunda es $P_2 = 50kN$ y está aplicada en los nudos 2 y 4. Las barras son de acero, con sección transversal cuadrada. Los miembros horizontales, verticales y diagonales están cortados de tres barras diferentes. Las áreas de sus secciones transversales son respectivamente, A_1 , A_2 y A_3 , que se consideran como variables aleatorias. Las variables aleatorias y las variables de diseño del problema se recogen en la Tabla 1. Las cargas de entrada aleatoria se consideran correlacionadas. Las desviaciones estándar se consideran constantes a lo largo del proceso de diseño RBDO.

Figure 1: Estructura articulada de 10 barras



En este ejemplo de RBDO, se minimiza el volumen de la estructura sujeto a 11 restricciones de fiabilidad correspondientes a funciones de estado límite. Las variables de diseño están limitadas por límites laterales. El problema RBDO se formula como:

$$\begin{aligned} & \text{Min } V(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_P) \\ & \text{s.a. } \beta_i \geq \beta_i^t = 3.7 \quad i = 1, \dots, 11. \quad (7) \\ & \quad \quad 5 \text{ cm}^2 \leq \mu_{X_i} \leq 75 \text{ cm}^2 \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Donde las restricciones de fiabilidad corresponden con las siguientes funciones de estado límite:

Restricción de Desplazamiento: El desplazamiento vertical del nudo 2 (q_v^2) está limitado:

$$g_1(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = 1 - \frac{|q_v^2(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})|}{q^a} \quad (8)$$

donde el desplazamiento admisible es $q^a = 3.5 \text{ cm}$.

Restricciones de Tensión: La tensión máxima del elemento está limitada:

$$g_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) = 1 - \frac{|\sigma_{i-1}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})|}{\sigma_{i-1}^a(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})} \quad i = 2, \dots, 11 \quad (9)$$

donde σ_j^a es la tensión máxima admisible y, en el caso de barras a compresión, se considera el posible pandeo de la barra y toma el valor de la tensión crítica de Euler, que se escribe como:

$$\sigma^{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2 A} \quad (10)$$

donde E es el módulo de elasticidad, I_{\min} es el momento de inercia mínimo de la sección transversal, l es la longitud de la barra y A es el área de la sección transversal. Se considera que las secciones transversales de las barras son cuadradas. Se fija un índice de fiabilidad objetivo $\beta_t = 3.7$ para todas las restricciones. Este valor de índice de fiabilidad corresponde con el valor de la probabilidad de fallo de $1.0780 \cdot 10^{-4}$.

Consideramos en esta sección la aplicación de los métodos RBDO implementados cuando las cargas que están actuando sobre la estructura de 10 barras son variables aleatorias no normales correlacionadas. Se han considerado valores diferentes del coeficiente de correlación ρ .

El coeficiente de correlación lineal ρ entre las cargas no puede tomar valores en todo el rango $[-1,1]$, puesto que si ρ está próximo a 1 o -1, la matriz de correlación lineal no es definida positiva y, por tanto, la transformación de Nataf no puede aplicarse. Por esta razón se consideran valores de ρ en el intervalo $[-0.95, 0.95]$.

Se aplican tres métodos RBDO para resolver ambos casos: Método de doble lazo basado en RIA (RBDO-RIA), Método RBDO – PMA+ y el método SORA-HMV+, que utiliza el método HMV+ para el análisis de fiabilidad inversa. No se ha utilizado el método de lazo único puesto que no es adecuado para trabajar con variables aleatorias correlacionadas.

La Tabla 2 contiene los resultados obtenidos mediante RBDO-RIA. La Tabla 3 contiene los resultados obtenidos mediante RBDO – PMA+ (HMV+). Se utilizaron los siguientes parámetros $e\text{-activa} = 0.7$ y $e\text{-proximidad} = 0.1$ para controlar la condición de restricción activa y de proximidad de dos diseños consecutivos, respectivamente. La Tabla 4 proporciona los resultados obtenidos mediante SORA-HMV+. Los resultados se han verificado aplicando MCS con muestreo por importancia a las restricciones activas (g_2, g_7 y g_8). El error en términos de índice de fiabilidad está por debajo del 0.5%.

Tabla 1. Variables Aleatorias en la estructura de 10 barras

Variable Aleatoria	Descripción	Distribución	Valor medio inicial	Desviación Estándar	Variable de Diseño
X_1	A_1	LN	20.0 cm ²	1.0 cm ²	μ_{X_1}
X_2	A_2	LN	20.0 cm ²	1.0 cm ²	μ_{X_2}
X_3	A_3	LN	20.0 cm ²	1.0 cm ²	μ_{X_3}
X_4	E	LN	21000.0 kN/cm ²	1000 kN/cm ²	-
X_5	σ^a	LN	21.0 kN/cm ²	20 kN/cm ²	-
X_6	P_1	LN	100.0 kN	20 kN	-
X_7	P_2	LN	50.0 kN	2.5 kN	-

Tabla 2: Resultados para RBDO-RIA

ρ	Volumen, cm ³	A_1 , cm ²	A_2 , cm ²	A_3 , cm ²	Iters. OPT	LSFE
-0.95	214547.14	54.80	23.30	58.36	5	260
-0.80	215292.47	54.97	23.23	58.64	5	268

-0.60	216291.75	55.19	23.13	59.01	5	271
-0.40	217296.57	55.42	23.02	59.38	5	277
-0.20	218307.29	55.65	22.92	59.75	5	280
0.00	219321.57	55.88	22.81	60.12	5	279
0.20	220337.19	56.12	22.69	60.49	5	279
0.40	221352.18	56.36	22.57	60.86	5	280
0.60	222364.73	56.60	22.45	61.23	5	276
0.80	223362.91	56.84	22.32	61.60	5	271
0.95	224115.57	57.02	22.21	61.88	5	271

Tabla 3: Resultados para RBDO-PMA+ (HMV+) con e -activa = 0.7 y e -proximidad = 0.1.

ρ	Volumen, cm ³	A ₁ , cm ²	A ₂ , cm ²	A ₃ , cm ²	Iters. OPT	LSFE
-0.95	214563.87	54.81	23.30	58.37	7	132
-0.80	215304.19	54.97	23.23	58.64	7	131
-0.60	216300.62	55.19	23.13	59.01	7	131
-0.40	217305.37	55.42	23.03	59.38	7	131
-0.20	218316.01	55.65	22.92	59.75	7	130
0.00	219330.20	55.89	22.81	60.12	7	127
0.20	220345.81	56.12	22.69	60.49	7	127
0.40	221360.84	56.36	22.57	60.86	7	127
0.60	222373.52	56.60	22.45	61.24	7	127
0.80	223382.21	56.84	22.32	61.61	7	127
0.95	224135.87	57.02	22.22	61.88	6	119

Tabla 4: Resultados para RBDO-SORA (HVM+)

ρ	Volumen, cm ³	A ₁ , cm ²	A ₂ , cm ²	A ₃ , cm ²	Iters. OPT	LSFE
-0.95	214301.28	54.65	23.24	58.37	4	465
-0.80	215052.80	54.83	23.17	58.64	5	514
-0.60	216071.05	55.06	23.07	59.01	5	509
-0.40	217101.47	55.31	22.97	59.38	5	509
-0.20	218139.53	55.55	22.87	59.75	5	497
0.00	218891.25	55.81	22.76	59.98	5	488
0.20	219995.51	56.06	22.65	60.38	5	484
0.40	221091.57	56.31	22.54	60.78	5	484
0.60	222177.65	56.56	22.42	61.18	4	286
0.80	223252.39	56.82	22.30	61.57	5	484
0.95	224050.35	57.01	22.20	61.86	5	484

Los resultados de las tablas muestran la importancia de considerar la correlación entre las variables aleatorias. Así, existe una diferencia en el volumen del diseño óptimo de casi 10000 cm³ de acero entre los casos extremos de correlación positiva y correlación negativa. Por otro lado el número de iteraciones de optimización (Iters. OPT) y el número de evaluaciones de funciones de estado límite (LSFE) o restricciones probabilistas son el mejor indicador de la eficiencia del método.

6. Conclusiones

Se ha realizado el diseño óptimo del tamaño de las secciones transversales de las barras de una estructura articulada sometida a cargas aleatorias correlacionadas, para distintos valores del coeficiente de correlación. Los resultados, recogidos en las tablas, muestran como varían las variables de diseño para la solución óptima en función del coeficiente de correlación que caracteriza la dependencia entre las cargas. Se comprueba que el valor de ρ influye de forma fundamental en la solución óptima. La no consideración de la existencia de correlación entre las variables aleatorias puede llevar a resultados erróneos.

Se utilizó la Transformación de Nataf para considerar la dependencia entre las variables aleatorias. Sin embargo, se podría utilizar la Teoría de Cópulas para modelar la dependencia entre las variables de forma más ajustada. Para ello es necesario disponer de una amplia muestra de las variables aleatorias.

Las tablas también proporcionan información sobre la eficiencia de los métodos RBDO. Así, el método RBDO-PMA+ (HVM+) resultó el más eficiente, aunque se precisó de un ajuste adecuado de los parámetros del método.

Referencias

- Du, X. & Chen, W. (2004). Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. *ASME J Mechanical Design* 126(2), 225-233.
- Chen, X, Hasselman T.K., & Neill D.J. (1997). Reliability based structural design optimization for practical applications, In: *Proceedings, 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, structural dynamics, and materials conference and exhibit*, Orlando, FL.
- Hasofer, A.M., & Lind N. (1974). An Exact and Invariant First-Order Reliability Format. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 100: 111-121.
- Liang J., Mourelatos Z.P. & Tu, J. (2008). A single-loop method for reliability-based design optimization, *Int. J. Product Development*, 5(1-2), 76-92.
- Nataf, A. (1962). Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences A*, 225:42-3.
- Rosenblatt, M. (1952). Remarks on A Multivariate Transformation, *Ann Math Statist*, 23, 470-2, 1952.
- Socie D.F. (2010). Seminar Notes: Probabilistic aspects of fatigue. <http://www.fatiguecalculator.com>.
- Wang L. and Kodiyalam S. (2002). An efficient method for probabilistic and robust design with non-normal distributions, *Proceedings of 34rd AIAA SDM Conference*, Denver, CO.
- Youn, B.D. Choi, K.K. & Du, L. (2005a) Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value (HMV+) method, *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 29(2), 134-48.
- Youn, B.D. Choi, K.K. & Du, L. (2005b). Enriched Performance Measure Approach (PMA+) for Reliability-Based Design Optimization Approaches, *AIAA Journal*, 43(4), 874-84.

Correspondencia (Para más información contacte con):

Luis Celorrio Barragué
Departamento de Ingeniería Mecánica.
Universidad de La Rioja
Edificio Departamental,
Luis de Ulloa 20, 26004 Logroño.
Phone: 34-941299542
E-mail: luis.celorrio@unirioja.es; luis.celorrio@gmail.com
URL: www.unirioja.es