

METODOLOGÍA EFICIENTE DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL BASADA EN FIABILIDAD

Celorrio Barragué, Luis^(p).

Abstract

The Spanish Code of Building has included the methods of Structural Reliability into the Spanish regulations about Structural Safety. Although these methods are considerate as an informative annex, however they are an important tool in design of engineering structures.

The latest advances in the methods of structural reliability, optimization and sensitivity analysis have led to the development of computational tools for RBDO (Reliability Based Design Optimization). In RBDO, deterministic optimization is enhanced by reliability performances and is formulated within a probabilistic framework. However, RBDO applications still exhibit severe limitations due mostly to low computational efficiency. A two level RBDO procedure has been implemented: optimization is carried out at the outer level by an algorithm based in SQP (Sequential Quadratic Programming), while structural reliability analysis is carried out at the inner level by first or second order reliability methods (FORM / SORM). Also, intensive computational processes as DSA (Design Sensitivity Analysis) and FEA (Finite Element Analysis) must be implemented. Several examples of structural systems are shown to verify the efficiency of the method.

Keywords: Structural reliability, structural optimization, reliability-based optimization, reliability index approach, performance measure approach.

Resumen

Con la entrada en vigor del Código Técnico de la Edificación, se han introducido en la normativa española sobre Seguridad Estructural los métodos de fiabilidad estructural. Aunque están recogidos en el Código como un anejo informativo están adquiriendo gran relevancia.

Los avances más recientes en los métodos de fiabilidad estructural, optimización y en el análisis de sensibilidad han dado lugar al desarrollo de herramientas computacionales que soportan procesos de Diseño Optimo Basado en Fiabilidad (RBDO), en los que la optimización determinista se amplía con restricciones sobre las prestaciones de fiabilidad estructural. Sin embargo, la aplicación práctica de estas herramientas todavía exhibe grandes limitaciones debidas principalmente a su baja eficiencia computacional. Se ha implementado un proceso RBDO de dos niveles: el nivel externo utiliza para la optimización un algoritmo SQP (Programación Cuadrática Secuencial), mientras que el nivel interno realiza el análisis de fiabilidad mediante métodos de primer o segundo orden (FORM/SORM). A un nivel más interno es necesario realizar algunas evaluaciones que consumen mucho tiempo de cálculo como son el Análisis de Sensibilidad del Diseño (DSA) y el Análisis estructural mediante elementos finitos (FEA). Se presentan varios ejemplos que muestran la eficiencia del método.

Palabras clave: Fiabilidad estructural, optimización, optimización basada en fiabilidad, método de índice de fiabilidad, método de medida de prestación.

1. Introducción

La aprobación en Marzo de 2006 del Código Técnico de la Edificación [1] ha propiciado que los métodos de fiabilidad estructural [2]-[3]. se apliquen con un respaldo legal en los proyectos de estructuras. Tradicionalmente, los ingenieros y arquitectos utilizan el método de coeficientes de seguridad obteniendo diseños de estructuras sobredimensionadas. Sin embargo, en ocasiones no es posible obviar las incertidumbres de las variables que intervienen en el problema (cargas, características del material, dimensiones geométricas, etc.). En esta comunicación se estudia un procedimiento que permite obtener diseños óptimos en coste y que además cumplen unas especificaciones de fiabilidad como, por ejemplo una probabilidad de fallo de la estructura menor que un valor máximo especificado por el diseñador o por la normativa. A este tipo de procesos de diseño se le conoce con el nombre de Diseño Óptimo Basado en Fiabilidad (RBDO). Estos procesos dan estructuras más seguras y con un gran ahorro en costes. En esta comunicación se han utilizado los acrónimos en inglés de los conceptos más utilizados por ser estos más conocidos en el ámbito de Optimización Estructural.

Aunque las ideas básicas sobre RBDO se establecieron hace más de 30 años [4], la solución de procesos RBDO de estructuras no es fácil: requiere realizar gran cantidad de cálculos, entre otros, las evaluaciones de funciones de prestación (o funciones de estado límite) en la fase de análisis de fiabilidad. En el caso de sistemas estructurales, generalmente las funciones de prestación dependen de forma implícita de las variables aleatorias del sistema, por lo que es necesario realizar cálculos mediante elementos finitos (FEA). Para realizar análisis de fiabilidad se debe calcular el gradiente de las funciones de prestación y para ello se emplean métodos de Análisis de Sensibilidad de Diseño (DSA). Debido a todo este esfuerzo de cálculo pueden aparecer problemas numéricos en un proceso RBDO como los clásicos de falta de convergencia, exactitud y estabilidad.

Tradicionalmente, el RBDO está implementado como un proceso iterativo de doble lazo (figura 1). En el lazo externo se desarrolla el proceso de optimización en el espacio de las variables de diseño $\mathbf{d}$. En la aplicación desarrollada esta optimización se lleva a cabo mediante un algoritmo SQP (Programación Cuadrática Secuencial). En paralelo, en el lazo interno se realiza el análisis de fiabilidad en el espacio de variables aleatorias normales estandarizadas mediante métodos de primer o segundo orden (FORM/SORM). A un nivel más interno se realiza el cálculo de DSA/FEA.

En la siguiente sección se realiza una revisión de los procesos RBDO de doble lazo, detallando los métodos que se utilizan para el análisis de fiabilidad en el lazo interno. Existen dos clases de métodos: los basados en el índice de fiabilidad (RIA) y los basados en la medida de la función de prestación (PMA). Se señalarán algunas conclusiones sobre la efectividad de estos métodos. En la sección 3 se presentan dos ejemplos numéricos: en el primero las funciones de prestación están dadas de forma analítica, mientras que en el segundo se trata de optimizar el diseño de una estructura articulada de 10 barras. Finalmente, se exponen las conclusiones del estudio realizado.

2. Revisión de los Métodos Optimización de Diseño Basada en Fiabilidad (RBDO)

2.1 Definición general del modelo de RBDO

El modelo RBDO se puede definir generalmente como: [4], [6-9], [12],[14].

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} \quad \text{Coste}(\mathbf{d}) \\
&\text{sujeto a} \quad P(G_i(\mathbf{X}) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_i) = p_{fi}, \quad i = 1, \dots, np \quad (1) \\
&\quad \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{d} = [d_i]^T \in R^n$ es el vector de variables de diseño, $\mathbf{X} = [X_i]^T \in R^{nr}$ es el vector de variables aleatorias y n , nr y np son el número de variables de diseño, variables aleatorias y restricciones probabilistas respectivamente.

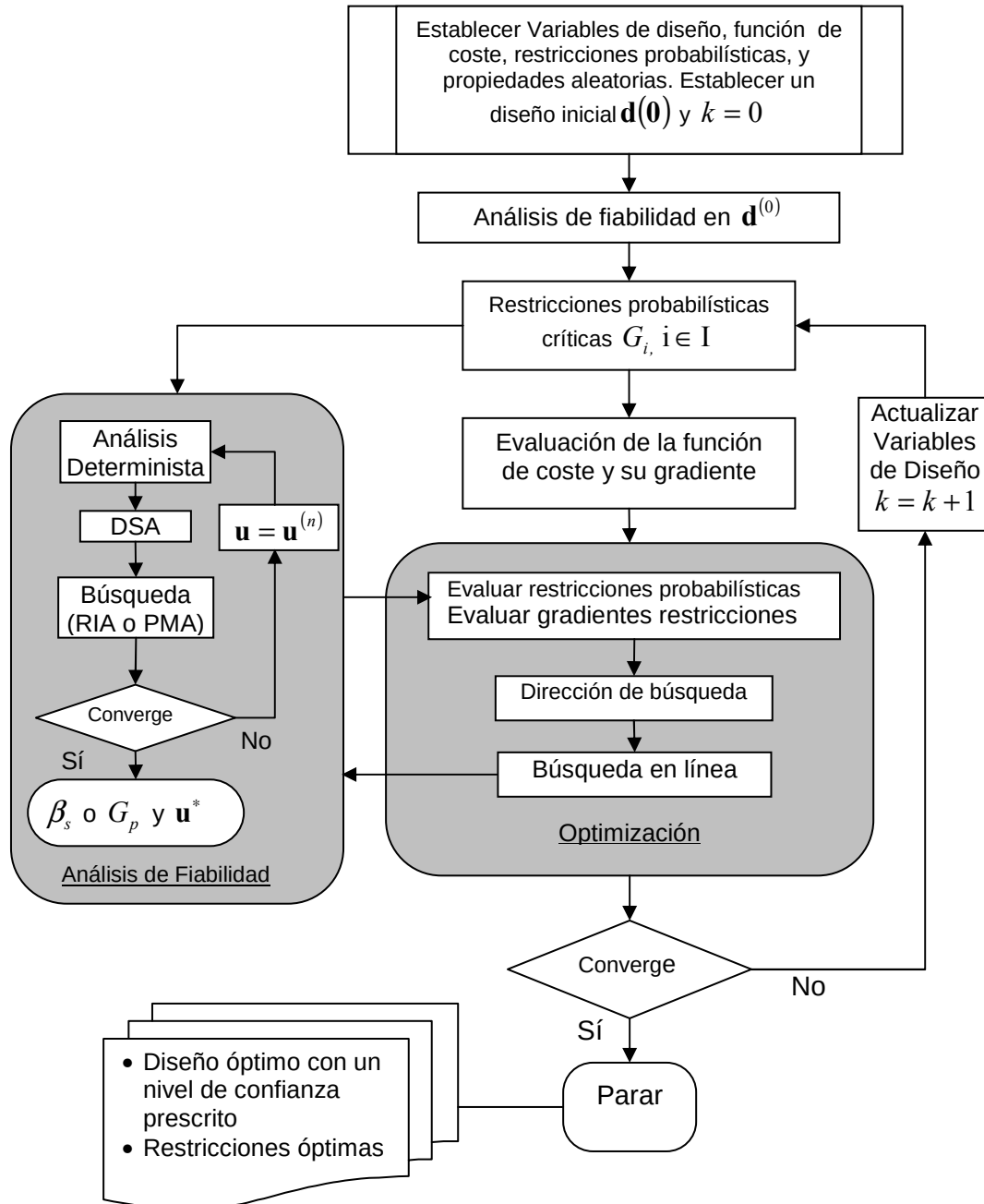


Figura 1. Diagrama de flujo de un proceso numérico de RBDO

Las restricciones probabilísticas se describen mediante funciones de prestación o funciones de estado límite $G_i(\mathbf{X})$. β_i es el nivel de confianza o índice de fiabilidad requerido para las restricciones probabilísticas. Está relacionado con la probabilidad de fallo p_{fi} mediante la función de distribución normal estándar $\Phi(\cdot)$.

Cada función de prestación $G_i(\mathbf{X})$ está caracterizada por su función de distribución de probabilidad $F_{G_i}(\cdot)$ de forma que:

$$F_{G_i}(0) = P(G_i(\mathbf{X}) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_i) \quad (2)$$

donde la probabilidad de fallo se escribe como

$$p_{fi} = F_{G_i}(0) = P(G_i(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{G_i(\mathbf{x}) \leq 0} \cdots \int f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n, \quad i = 1, \dots, np \quad (3)$$

En la ecuación (3) $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ es la función de densidad conjunta del vector de variables aleatorias $\mathbf{X} = [X_i]^T \in R^{np}$. La evaluación de la ecuación (3) se lleva a cabo mediante un análisis de fiabilidad estructural. Existen varios métodos de integración de probabilidad aproximados que proporcionan soluciones eficientes, tales como el método de fiabilidad de primer orden (FORM) y los métodos de fiabilidad de segundo orden asintótico (SORM) [1]. El FORM proporciona generalmente una exactitud adecuada y es el que se emplea en la mayoría de las aplicaciones de RBDO. En FORM, para realizar el análisis de fiabilidad se precisa realizar una transformación $\mathbf{T}$ desde el espacio de variables aleatorias original $\mathbf{X}$ al espacio de variables aleatorias normales tipificadas independientes $\mathbf{U}$, $\mathbf{U} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$. Si las variables aleatorias originales son independientes se puede utilizar la transformación de cola normal. En el caso de variables aleatorias dependientes se utiliza la transformación de Rosenblatt [5] o la transformación de Nataf. Mediante esta transformación la función de prestación $G(\mathbf{X})$ en el espacio $\mathbf{X}$ puede transformarse entonces en $g(\mathbf{U})$ en el espacio $\mathbf{U}$.

Como ya se ha descrito, la restricción probabilística en (2) se puede escribir de dos maneras diferentes mediante transformaciones inversas [7]:

$$\beta_{s_i} = (-\Phi^{-1}(F_{G_i}(0))) \geq \beta_i \quad (4)$$

$$G_{p_i} = F_{G_i}^{-1}(\Phi(-\beta_i)) \geq 0 \quad (5)$$

donde β_{s_i} y G_{p_i} son respectivamente el índice de fiabilidad y la medida de prestación probabilística para la restricción probabilística i -ésima $G_i(\mathbf{X})$ y β_i es el índice de fiabilidad mínimo requerido para la estructura. La ecuación (4) se emplea para describir la restricción probabilística en la ecuación (1) en términos del índice de fiabilidad, es decir, es la utilizada en el método basado en el índice de fiabilidad (RIA). De forma análoga, la ecuación (5) puede sustituir a la restricción probabilística (1) en lo que se conoce como método de medida de prestación (PMA).

2.2 Análisis de Fiabilidad de Primer Orden mediante RIA

En el método RIA, al índice de fiabilidad calculado a partir de método de primer orden (FORM) lo llamamos $\beta_{s,FORM}$ y se obtiene como la solución del siguiente problema de optimización no lineal con una restricción de igualdad en el espacio $\mathbf{U}$, que está definida mediante la función de estado límite:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \|\mathbf{u}\| \\ &\text{sueto a } g(\mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

donde el punto óptimo está sobre la superficie de fallo y se conoce como el punto más probable (MPP) $\mathbf{u}^*$ y por tanto $\beta_{s,FORM} = \|\mathbf{u}^*\|$

La resolución del problema (6) se puede realizar utilizando cualquier algoritmo desarrollado para análisis de fiabilidad mediante aproximación de primer orden o mediante algoritmos de optimización generales. Generalmente se utiliza el algoritmo iterativo de HL-RF para desarrollar el análisis de fiabilidad en RIA debido a su simplicidad y eficiencia. En la aplicación desarrollada se ha utilizado el método HL-RF mejorado de Zhang y Der Kiureghian [10].

2.3 Análisis de Fiabilidad de Primer Orden en PMA.

El análisis de fiabilidad en PMA se formula como el inverso del análisis de fiabilidad en RIA. La medida de prestación probabilística G_{p_i} se obtiene de un problema de optimización no lineal [7] en el espacio $\mathbf{U}$ definido como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } g(\mathbf{u}) \\ &\text{sueto a } \|\mathbf{u}\| = \beta_t \end{aligned} \quad (7)$$

donde el punto óptimo sobre la superficie de fiabilidad objetivo se identifica como el $\mathbf{u}_{\beta=\beta_t}^*$ con una fiabilidad prescrita $\beta_t = \|\mathbf{u}_{\beta=\beta_t}^*\|$, que también se conoce como MPP, pero que no tiene por que ser el mismo que el MPP obtenido en RIA. Al contrario que en RIA ahora sólo se necesita calcular el vector dirección unitaria $\mathbf{u}_{\beta=\beta_t}^* / \|\mathbf{u}_{\beta=\beta_t}^*\|$ explorando la esfera o hiperesfera $\|\mathbf{u}\| = \beta_t$.

Para la resolución del problema de optimización (7) también se pueden emplear algoritmos de optimización general [11], sin embargo los métodos de valor medio (MV) como el Método de Valor Medio Avanzado (AMV) son más habituales en PMA [12] debido a su simplicidad y eficiencia.

2.4 Método AMV de análisis de fiabilidad en PMA

La formulación del método de Valor Medio Avanzado (AMV) de primer orden comienza con el método de Valor Medio (MV), definido como:

$$\mathbf{u}_{MV}^* = \beta_t \mathbf{n}(\mathbf{0}) \text{ donde } \mathbf{n}(\mathbf{0}) = -\frac{\nabla_X G(\boldsymbol{\mu})}{\|\nabla_X G(\boldsymbol{\mu})\|} = -\frac{\nabla_U g(\mathbf{0})}{\|\nabla_U g(\mathbf{0})\|} \quad (8)$$

El método trata de minimizar la función de prestación $g(\mathbf{u})$ (es decir, la función de coste en (7), y para ello define la dirección de descenso máximo normalizada $\mathbf{n}(\mathbf{0})$ en el valor medio. El AMV actualiza de forma iterativa el vector de dirección de máximo descenso en el punto probable $\mathbf{u}_{AMV}^{(k)}$ obtenido inicialmente usando el método MV. Así, el método AMV se puede formular como

$$\mathbf{u}_{AMV}^{(1)} = \mathbf{u}_{MV}^*, \quad \mathbf{u}_{AMV}^{(k+1)} = \beta_t \mathbf{n}(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)}) \text{ con } k \geq 1 \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)}) = -\frac{\nabla_U g(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)})}{\|\nabla_U g(\mathbf{u}_{AMV}^{(k)})\|} \quad (10)$$

Este método trabaja bien en el caso de funciones de prestación convexas, pero exhibe inestabilidad e ineficiencia en la resolución de una función cóncava puesto que actualiza la dirección considerando un solo punto: el MPP actual.

2.5 Método de Valor Medio Conjugado (CMV).

El método AMV suele presentar problemas de convergencia lenta y/o divergencia cuando se aplica con funciones de prestación cóncavas. Estos problemas se deben a la falta de información actualizada durante el análisis de fiabilidad iterativo. Estas clases de dificultades pueden resolverse usando tanto la información sobre el MPP actual como la de los MPP previos como hace el método de Valor medio Conjugado (CMV). En el CMV la nueva dirección de búsqueda se obtiene combinando $\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-2)})$, $\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-1)})$ y $\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)})$ con el mismo peso de forma que se dirija según la diagonal de las tres direcciones de máximo descenso consecutivo. Es decir,

$$\mathbf{u}_{CMV}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_{CMV}^{(1)} = \mathbf{u}_{AMV}^{(1)}, \quad \mathbf{u}_{CMV}^{(2)} = \mathbf{u}_{AMV}^{(2)},$$

$$\mathbf{u}_{CMV}^{(k+1)} = \beta_t \frac{\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-1)}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-2)})}{\|\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-1)}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k-2)})\|} \text{ para } k \geq 2 \quad (11)$$

donde

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)}) = -\frac{\nabla_U g(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)})}{\|\nabla_U g(\mathbf{u}_{CMV}^{(k)})\|} \quad (12)$$

Consecuentemente, la dirección de máximo descenso conjugada mejora significativamente la tasa de convergencia, así como la estabilidad comparada con el método AMV para la función de prestación cóncava. Sin embargo, el método CMV propuesto es ineficiente para funciones de prestación convexas. Por tanto, es necesario implementar un método que sea eficiente para cualquier tipo de función de prestación. Una posible solución es seleccionar adaptativamente los métodos AMV o CMV una vez que se haya determinado el tipo de la función de prestación para obtener la evaluación más robusta y eficiente de las restricciones probabilísticas. En la siguiente sección se discute este método.

2.6 Método de valor medio híbrido (HMV)

Para poder seleccionar el método de búsqueda del MPP apropiado hay que identificar primero el tipo de función de prestación. El criterio del tipo de función se obtiene a partir de las direcciones de máximo descenso en tres iteraciones consecutivas de la siguiente manera:

$$\zeta^{(k+1)} = (\mathbf{n}^{(k+1)} - \mathbf{n}^{(k)}) \cdot (\mathbf{n}^{(k)} - \mathbf{n}^{(k-1)}) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \text{sign}(\zeta^{(k+1)}) > 0 : & \text{ Tipo convexo en } \mathbf{u}_{HMV}^{(k+1)} \text{ con respecto al diseño } \mathbf{d} \\ \text{Si } \text{sign}(\zeta^{(k+1)}) \leq 0 : & \text{ Tipo concavo en } \mathbf{u}_{HMV}^{(k+1)} \text{ con respecto al diseño } \mathbf{d} \end{aligned} \quad (14)$$

donde $\zeta^{(k+1)}$ es el criterio de convexidad/ concavidad para la función de prestación en la iteración $k+1$ y $\mathbf{n}^{(k)}$ es la dirección de máximo descenso para la función de prestación en el MPP $\mathbf{u}_{HMV}^{(k)}$ de la iteración k -ésima. Una vez que se ha definido el tipo de función de prestación, se selecciona adaptativamente uno de los dos algoritmos numéricos para la búsqueda del MPP. A este procedimiento numérico se le llama método de Valor Medio Híbrido (HMV).

2.7 RIA vs. PMA en el Análisis de Fiabilidad

Se han realizado diversos estudios comparativos sobre la eficiencia de los métodos RIA y PMA en un proceso RBDO. En [7] Tu y Choi consideran que el tamaño del espacio de búsqueda en un análisis de fiabilidad podría afectar a la eficiencia de la búsqueda del MPP. Sin embargo, Youn, Choi y Park, basándose en algunos ejemplos numéricos, concluyen en [8] que los tamaños de los espacios de búsqueda del MPP no son relevantes para la eficiencia del análisis y que PMA es superior a RIA y recomiendan usar PMA en vez de RIA para todos los casos. La razón es que la búsqueda del MPP en PMA con restricción de igualdad esférica es más fácil de resolver que el análisis RIA con una restricción complicada. En otras palabras, es más fácil minimizar una función de coste compleja sujeta a una función de restricción simple que minimizar una función de coste simple sujeta a una función de restricción compleja. Como se ve en la figura 2, mientras que en RIA el MPP se alcanza zigzagueando, en PMA primero se alcanza la hipersfera y después las iteraciones se producen sobre esta hipersfera.

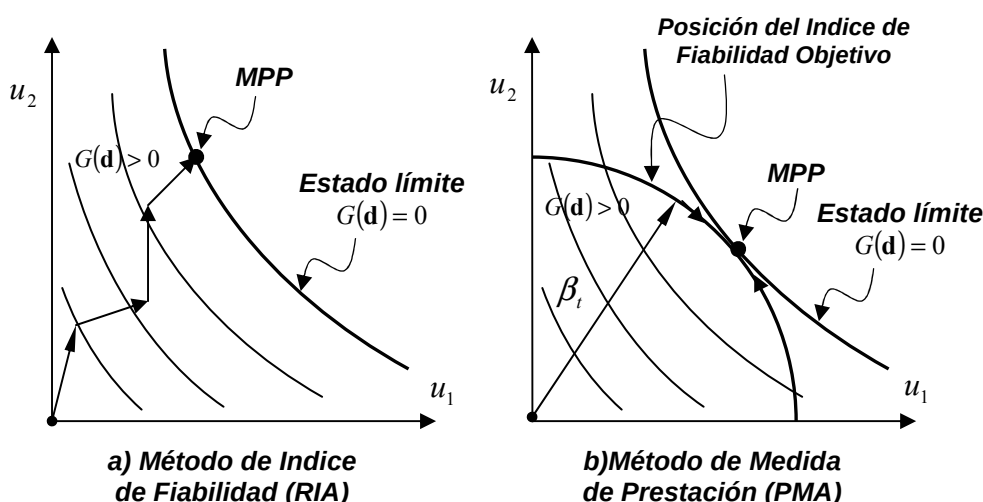


Figura 2. Esquemas de las búsquedas del MPP respectivo en RIA Y PMA.

3. Ejemplos

Se consideran algunos ejemplos de aplicación de los métodos expuestos. Los algoritmos se han implementado en el lenguaje MATLAB. Para realizar la optimización mediante SQP se ha utilizado la función `fmincon()` del Toolbox de optimización. Para el análisis de fiabilidad en el método RIA se han utilizado las funciones de FERUM [13].

3.1 Ejemplo 1: Ejemplo Matemático

Consideramos el siguiente modelo matemático de RBDO tomado de [14], con variables de diseño $\mathbf{d} = [\mu_{X_1}, \mu_{X_2}]^T$. El problema de optimización se define como:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \text{Coste}(\mathbf{d}) = d_1 + d_2 \\ &\text{sueto a} && P(G_i(\mathbf{X}) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_i), \quad i = 1, \dots, 3 \\ &&& 0 \leq d_1 \leq 10 \quad ; \quad 0 \leq d_2 \leq 10 \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{X}) &= X_1^2 X_2 / 20 - 1 \\ G_2(\mathbf{X}) &= (X_1 + X_2 - 5)^2 / 30 + (X_1 - X_2 - 12)^2 / 120 - 1 \end{aligned} \quad (16)$$

y $\beta_i = 2.0, i = 1, 2, \dots$. Las variables aleatorias se distribuyen según distribuciones normales $X_1 \sim N(\mu_{X_1}, 0.6)$ y $X_2 \sim N(\mu_{X_2}, 0.6)$. El diseño inicial tomado es $\mathbf{d}^{(0)} = [5.0, 5.0]^T$. Mediante este ejemplo se puede verificar el programa implementado.

Para la solución del problema se consideran los dos tipos de métodos de análisis de fiabilidad: RIA y PMA. El RIA fue implementado mediante el algoritmo HL-RF mejorado y el método PMA mediante el algoritmo HMV explicado en la sección anterior. En ambos casos el algoritmo converge a la misma solución $\mathbf{d}_{opt} = [3.4024, 3.1959]^T$ (ver tablas 1 y 2). Mientras que el modelo RBDO resuelto mediante RIA necesitó 86 evaluaciones de función

de prestación y de su gradiente, la solución mediante PMA necesitó 80 evaluaciones de función de prestación y de su gradiente.

Iter.	Coste	d_1	d_2	β_{s_1}	β_{s_2}	Nº Evals
1	10.0000	5.0000	5.0000	4.8803	3.9644	20(8/12)
2	8.0000	4.0000	4.0000	2.8076	2.4079	17(7/10)
3	6.6146	3.3514	3.2633	1.3507	1.5176	13(5/8)
4	6.5975	3.4017	3.1957	1.3804	1.3817	12(5/7)
5	6.5983	3.4024	3.1959	1.3816	1.3816	12(5/7)
6	6.5983	3.4024	3.1959	1.3816	1.3816	12(5/7)
Número total de evaluaciones de funciones de prestación/gradientes						86

Tabla 1. Resultados de RBDO usando RIA para el ejemplo matemático

Iter.	Coste	d_1	d_2	G_1	G_2	Nº Evals
1	10.0000	5.0000	5.0000	-3.1967	-0.6133	9(4/5)
2	8.0000	4.0000	4.0000	-0.9258	-0.1953	11(5/6)
3	6.8677	3.5008	3.3669	-0.1402	-0.0353	12(5/7)
4	6.6100	3.4058	3.2042	-0.0055	-0.0018	12(5/7)
5	6.5983	3.4024	3.1959	-0.0000	-0.0000	12(5/7)
6	6.5983	3.4024	3.1959	-0.0000	-0.0000	12(5/7)
7	6.5983	3.4024	3.1959	-0.0000	-0.0000	12(5/7)
Número total de evaluaciones de funciones de prestación/gradientes						80

Tabla 2. Resultados de RBDO usando PMA para el ejemplo matemático

3.2 Ejemplo 2: Estructura articulada de 10 barras

En este ejemplo se plantea la solución del modelo RBDO para la estructura articulada de 10 barras mostrada en la figura 3. Esta estructura es habitual en los estudios de optimización estructural. Se ha tomado de la referencia [15] en la que únicamente se estudia el análisis de fiabilidad. Se optimiza el peso de la estructura sujeta a una restricción probabilística respecto al desplazamiento de un nudo.

Las barras de la estructura articulada están agrupadas en 3 grupos: barras horizontales, barras verticales y barras diagonales puesto que están cortadas de tres vigas de aluminio distintas. Tomamos como variables X_1 , X_2 y X_3 las áreas de las secciones transversales de las barras de cada grupo. Estas tres variables pueden ser fuentes potenciales de incertidumbres y por tanto se consideran aleatorias.

El modelo RBDO con variables de diseño $\mathbf{d} = [\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \mu_{x_3}]^T$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} \quad \text{Volumen} = \sum_{j=1}^3 l_j d_j \\
 &\text{sujeto a} \quad P(G_1(\mathbf{X}) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_i) \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq d_i \leq 50 \text{ in} ; \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{17}$$

La restricción probabilística se define como:

$$G(\mathbf{X}) = 1 - \frac{|\delta_{2v}|}{\delta_{adm}} \tag{18}$$

siendo δ_{2v} el desplazamiento vertical del nudo 2, y δ_{adm} el desplazamiento vertical admisible del nudo 2. Se ha planteado solamente una restricción probabilística para el desplazamiento del nudo 2 puesto que a juicio del ingeniero esta restricción es la más crítica.

Las variables X_i siguen distribuciones normales con coeficiente de variación (COV) de 0.1. El punto de diseño inicial es $\mathbf{d}^0 = [13, 2, 9] \text{ in}^2 = [83.8708, 12.9032, 58.0644] \text{ cm}^2$. Se han tomado el módulo de Young, la densidad del material y las cargas como deterministas:

- Carga $P = 100000 \text{ lb} = 45359.237 \text{ kg}$
- Longitud $L = 360 \text{ in} = 9.144 \text{ m}$
- Módulo de Young $E = 10^7 \text{ psi} = 68.9475 \text{ MPa}$
- Desplazamiento adm del nudo 2 $\delta_{adm} = 4.0 \text{ in} = 0.1016 \text{ m}$
- Índice de Fiabilidad Objetivo $\beta_i = 2$

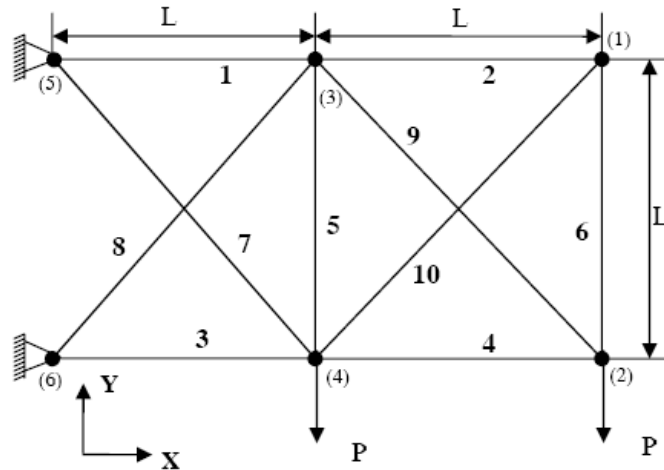


Figura 3. Estructura articulada de 10 barras.

El valor de las variables de diseño para la solución óptima obtenida mediante RBDO basado en RIA es $\mathbf{d}_{opt} = [13.9779, 1.7389, 9.6467] \text{ in}^2 = [90.1798, 11.2187, 62.2366] \text{ cm}^2$. El valor de la función objetivo es $41025.2906 \text{ in}^3 = 672284.06281 \text{ cm}^3$. Se necesitaron 24 iteraciones del

lazo de optimización o lazo externo. El análisis de fiabilidad precisó de 101 evaluaciones de la función de prestación y de su gradiente. Se ahorró mucho tiempo de cálculo puesto que se utilizó el método de derivación directa para el cálculo del gradiente.

4. Conclusiones

Los métodos de solución de los problemas RBDO es un campo de gran actividad investigadora. Aunque se han realizado grandes progresos en el desarrollo de métodos numéricos eficientes, la aplicación a estructuras reales de ingeniería todavía es un reto, debido a la complejidad de los desarrollos matemáticos y a problemas computacionales. El ingeniero debe seleccionar cuidadosamente el método adecuado tratando de llegar a un acuerdo de compromiso entre exactitud, eficiencia y robustez del algoritmo RBDO aplicado. En esta comunicación se han revisado los algoritmos de tipo doble lazo para la solución del modelo de RBDO y se han propuesto dos ejemplos: uno completamente matemático y otro de aplicación a una estructura articulada plana. Se han analizado los métodos de análisis de fiabilidad habituales en RBDO y se puede concluir que el método de medida de prestación (PMA) se comporta de forma más robusta y eficiente que el método basado en el índice de fiabilidad (RIA). En cualquier caso, los procedimientos de resolución de los problemas RBDO deben tratarse con un cuidado especial y los resultados obtenidos deben ser validados por el diseñador. Incluso en el caso de sistemas estructurales sencillos pueden existir varios modos de fallo y óptimos locales y puede ocurrir que los algoritmos no converjan o lo hagan solo para determinados puntos iniciales o para ciertos valores de nivel de fiabilidad objetivo.

Referencias

- [1] CTE. *Código Técnico de la Edificación*. RD 314/2006.de 17 de marzo. Ministerio de Vivienda. Madrid 2006.
- [2] Dalsgaard Sørensen, H., "*Structural Reliability*", Institute of Building Technology and Structural Engineering. Aalborg University. Denmark. 2003.
- [3] Melchers, R.E., "*Structural Reliability analysis and prediction*", Second Edition, John Wiley & Sons, 1999.
- [4] Chateaufneuf A. and Aoues Y., "Advances in solution methods for Reliability-Based Design Optimization", *Structural Design Optimization Considering Uncertainties*, Vol.1 Editor. Dan M Frangopol.2008.
- [5] Rosenblatt M., 1952, Remarks on multivariate transformation. *Annals of Math. Statistics*, Vol. 23, pp. 470-472.
- [6] Enevoldsen, I. and Sorensen, J.D., "Reliability-based optimization in structural engineering", *Structural Safety*, Vol. 15, 1994, pp 169-196.
- [7] Tu, J., and Choi, K.K., "A new Study on Reliability-Based Design Optimization", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, 1999, pp. 557-564.
- [8] Youn, B.D., Choi, K.K., and Park, Y.H. "Hybrid Analysis Method for Reliability-Based Design Optimization", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, 2003, pp 221-232.
- [9] Lee, J.O., Yang, Y.S., and Ruy, W.S., "A comparative study on reliability index and target performance based probabilistic structural design optimization". *Computer and Structures*, Vol. 80, 2002, pp.257-269.

- [10] Zhang, Y., and A. Der Kiureghian. "Two improved algorithms for reliability analysis. In R. Rackwitz, G. Augusti and A. Borr. Editors, Proce. 6th IFIP WG7.5 "Reliability and optimization of structural systems".1995.
- [11] Liu, P-L., and A. Der Kiureghian (1991). Optimization algorithms for structural reliability. *Struct. Safety*, 9(3), 161-177.
- [12] Wu, Y.T., Millwater, H.R., and Cruse, T.A. "Advanced Probabilistic Structural Analysis Method for Implicit Performance Functions," AIAA Journal, Vol. 28, pp 1663-1669. J., and Choi, K.K.,
- [13] www.ce.berkeley.edu/FERUM *Finite Element Reliability Using MATLAB*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley. 2002
- [14] Youn, B.D., and Choi, K.K., "An investigation of Nonlinearity of Reliability-Based Design Optimization Approaches", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, 2004, pp 403-411.
- [15] Choi, S.K., Grandhi, R. V. and Canfield, R.A., "Reliability-based Structural Design". Springer-Verlag. London. 2007.

Correspondencia (Para más información contacte con):

Luis Celorrio Barragué.

Universidad de La Rioja

Departamento de Ingeniería Mecánica.

C/ Luis de Ulloa 20, 26004 Logroño (La Rioja) ESPAÑA.

Phone: +34 941299542

Fax: +34 941299794

E-mail: luis.celorrio@unirioja.es ; luis.celorrio@ciir.conlared.com

Web: www.unirioja.es