

APLICACIÓN DEL MODELO MULTIFRACTAL UNIVERSAL A UNA SERIE HISTÓRICA DE LLUVIA HORARIA

García-Marín, A. P. ^(p); Jiménez-Hornero, F. J.; Ayuso-Muñoz, J. L

Abstract

The Universal Multifractal model (UM) can be used to study the variability of rainfall when considering it like a multiplicative cascade type process. The objective of the present work is to analyze an historical rainfall data series by using the UM model, in order to increase the knowledge of the fractal nature of rainfall. The parameters that characterize the universal multifractal model allow the obtaining of the theoretical scaling exponent function. The comparison of both empirical and theoretical scaling exponent functions let to conclude that the UM model can be used to describe the rainfall data series analyzed.

Keywords: Universal Multifractal Model; Rainfall

Resumen

El modelo Multifractal Universal (MU) puede utilizarse para modelar la variabilidad de la lluvia considerándola como un proceso multiplicativo de tipo cascada. El objeto de este trabajo consiste en analizar una serie histórica de datos horarios de precipitación utilizando el citado modelo de forma que se consolide el conocimiento respecto a la naturaleza fractal de la lluvia. El estudio de la función empírica escaladora de momentos estadísticos ha revelado la presencia de una transición de fase multifractal asociada con un momento crítico. La obtención de los parámetros del modelo MU ha permitido obtener la función teórica de los momentos estadísticos, encontrándose un buen ajuste a la función empírica excepto para los momentos de orden menor. El modelo MU resulta adecuado para describir estadísticamente la serie temporal de precipitación analizada.

Palabras clave: modelo Multifractal Universal; precipitación

1. Introducción

La lluvia es uno de los factores más importantes a la hora de estudiar determinados procesos que tienen un significativo impacto medioambiental: inundaciones, sequías, escorrentía, erosión, transporte de contaminantes. Sin embargo, su gran variabilidad tanto espacial como temporal, limita el uso de determinados modelos determinísticos y estocásticos desarrollados para describirla. Según de Lima (1998), en dichos modelos se realizan separaciones entre las diferentes escalas del proceso, de forma que cada escala se estudia de manera independiente a las demás. Por este motivo, muchos de estos modelos no se usan correctamente ya que no se tiene en cuenta su aplicación restringida para diversas escalas. Además, dichos modelos conceptualizan la lluvia de manera muy simple considerando por ejemplo la cantidad media de lluvia para un área determinada o durante un periodo concreto. Estas variables carecen normalmente de resolución temporal y espacial suficiente como para permitir un modelado detallado de un proceso tan complejo como es la precipitación (e.g. de Lima, 1998).

La aproximación multifractal conocida como formalismo de turbulencia o modelo Multifractal Universal (MU), fue desarrollado por Schertzer y Lovejoy (1987) para modelar la variabilidad de la lluvia como un proceso multiplicativo de tipo cascada, en el que el flujo de agua se

transfiere de las zonas (escalas) mayores a las más pequeñas de la atmósfera (e.g. Over y Gupta, 1994) de forma similar a la que tiene lugar en los modelos de turbulencia, en los que se asume la transferencia de energía entre escalas en el mismo sentido descendente. El formalismo de la turbulencia ha sido ampliamente utilizado para llevar a cabo diversos análisis de la estructura temporal de la lluvia (e.g. Ladoy *et al.*, 1993; Hubert *et al.*, 1993; Svensson *et al.*, 1996; Tessier *et al.*, 1993, 1996; de Lima y Grassman, 1999).

Con este trabajo se persigue contribuir a la consolidación del conocimiento existente de la naturaleza multifractal de la lluvia mediante la aplicación del formalismo multifractal de la turbulencia a la serie histórica de precipitación horaria disponible para Córdoba (sur de España).

2. Metodología

Para llevar a cabo un análisis de la estructura temporal de la lluvia mediante el formalismo multifractal de la turbulencia, la serie de datos a analizar ha de dividirse en intervalos de diversas resoluciones temporales entre los que no ha de existir solapamiento. El cociente entre el mayor intervalo y uno cualquiera se conoce como razón de escala λ . Considerando ε_λ como la intensidad de lluvia en cada intervalo para una escala λ dividida entre la media de la muestra para la mayor escala de interés ($\lambda=1$), el q -ésimo momento medio $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$ puede relacionarse con la función $k(q)$ según (Schertzer and Lovejoy, 1987):

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (1)$$

Si la representación de $K(q)$ frente a q es básicamente una línea recta, el proceso será monofractal. Sin embargo, si la representación es una función convexa, se estaría frente a un proceso multifractal.

El modelo Multifractal Universal, propuesto por Schertzer y Lovejoy (1987), asume como generador de multifractales, a una variable aleatoria que sigue una distribución extrema exponencial de Lévy. De esta forma, la expresión universal del modelo teórico viene dada por:

$$K(q) - qH = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) & \text{para } \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln(q) & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Los parámetros H , C_1 y α son los parámetros fundamentales necesarios para caracterizar la función escaladora teórica $K(q)$, es decir, las propiedades estadísticas de los procesos multifractales.

Existen diferentes métodos para obtener los parámetros H , C_1 y α del modelo multifractal universal. La estimación de los parámetros C_1 y α puede hacerse aplicando la técnica del momento de traza doble (DTM, del inglés Double Trace Moment). Según este método, la función exponente escaladora de momentos de traza doble $K(q, \eta)$, se obtiene de:

$$\left\langle \left(\varepsilon_\lambda^\eta \right)_\lambda^q \right\rangle = \lambda^{K(q, \eta)} \quad (3)$$

Así, $K(q, \eta)$ puede determinarse para valores específicos de q y de η , como la pendiente de la parte lineal obtenida al representar en un gráfico doblemente logarítmico $\left\langle \left(\varepsilon_{\lambda}^{\eta} \right)_{\lambda}^q \right\rangle$ frente a λ .

La estimación de C_1 se realiza a partir de la ecuación:

$$C_1 = (\alpha - 1)K(q, 1)/(q^{\alpha} - q) \quad (4)$$

El parámetro H mide el grado de no-conservación de un proceso multifractal, y para estimarlo se puede utilizar el exponente de escala del espectro de energía del proceso. Con los valores de α y C_1 , y una vez obtenidos β y $K(2)$, el valor de H viene dado por,

$$H = 0.5(\beta - 1 + K(2)) = 0.5(\beta - 1 + C_1(2^{\alpha} - 2)/(\alpha - 1)) \quad (5)$$

3. Datos

Los datos de lluvia horaria analizados fueron suministrados por el Instituto Nacional de Meteorología para la estación de Córdoba Aeropuerto (37.85°N 4.85°W) desde 1980 hasta 2003. La altitud de la zona es de 117 m y el clima es una mezcla entre características mediterráneas y efectos de tipo continental. La temperatura media anual es de 17,7 °C y la precipitación media ronda los 600 mm. Los períodos más lluviosos se sitúan entre Octubre y Mayo.

4. Resultados

La figura 1 muestra la representación doblemente logarítmica de los q -ésimos momentos de la intensidad de lluvia ε_{λ} para escalas temporales que oscilan desde 1 hora ($\lambda = 4096$) hasta casi 6 meses ($\lambda = 1$), frente al cociente de escala λ , para la serie temporal de precipitación horaria de Córdoba. Tal y como puede observarse, se detecta un comportamiento algo diferente para los momentos más pequeños y mayores, debido a la incertidumbre que se tiene al calcularlos (de Lima y Grassman, 1999). La estimación de los momentos de mayor orden está condicionada por las observaciones de mayor tamaño (eventos de lluvia mayores) y es altamente variable. Las intensidades de lluvia más pequeñas pueden no estar bien representadas en la serie de datos debido a la resolución del pluviómetro (0,1 mm). Sin embargo, en la figura 1 se representan tanto los momentos mayores (a) como los más pequeños (b), con objeto de obtener una descripción detallada de la dinámica de los datos de lluvia analizados. Las líneas rectas que se observan en ambas partes de la citada figura muestran el rango de comportamiento de escala de los momentos de la intensidad de lluvia, que varía desde 1 hora hasta 21 días. Los puntos que representan los momentos de mayor orden (figura 1a) se desvían aparecen situados relativamente por encima y por debajo de las citadas líneas rectas para todos los valores de $q > 3$. La misma tendencia puede observarse en la figura 1b para $q \leq 0,4$. Según de Lima y Grassman (1999), este hecho revela que las intensidades de lluvia más pequeñas y mayores están sobreestimadas e infravaloradas, respectivamente, en las series temporales de datos de lluvia.

La desaparición del comportamiento de escala a los 21 días (figura 1) se considera una manifestación del máximo sinóptico, concepto que puede definirse como la duración típica de las estructuras atmosféricas de escala planetaria (e.g. Kolesnikov y Monin, 1965).

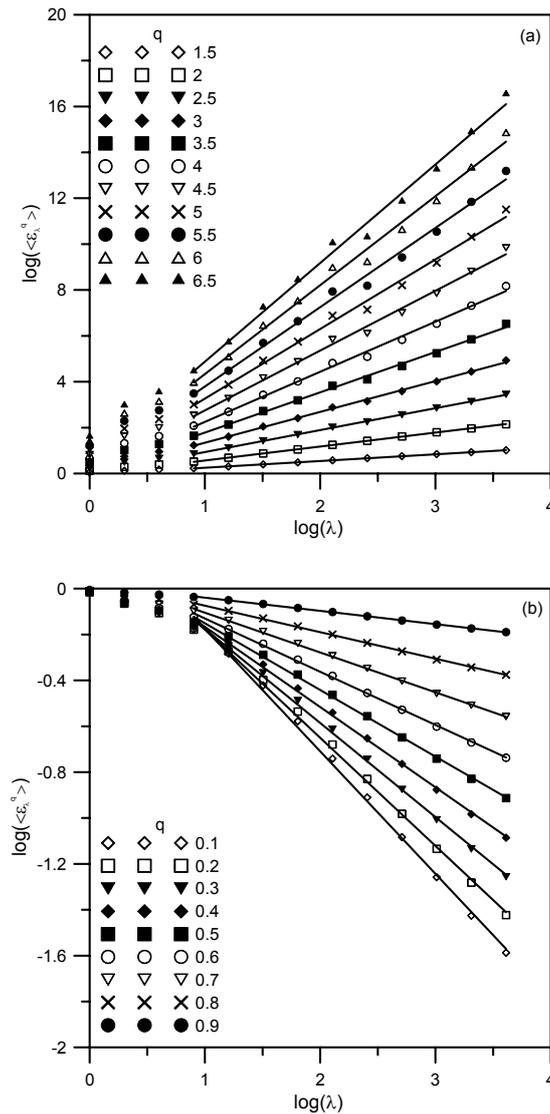


Figura 1. Curvas de momentos de orden (a) mayor y (b) menor que 1. Córdoba, datos horarios.

Siguiendo la ecuación (1), puede obtenerse la función exponente escaladora de momentos $K(q)$, que describe el comportamiento de escala para los momentos obtenidos en la figura 1, desde 1 hora hasta 21 días. La figura 2 muestra la representación de la función $K(q)$, y como puede observarse, presenta una forma básicamente convexa. Esta forma no lineal implica que la serie de datos de lluvia horaria para Córdoba puede considerarse multifractal. Sin embargo, puede observarse un comportamiento lineal para $q > q_{\max} = q_D \approx 3$. Este valor obtenido para el momento crítico q_D es similar al estimado por de Lima y Grasman (1999), 3,1, para Vale Formoso, una región semiárida de Portugal.

Para $q > q_{\max}$, la pendiente de la zona lineal de la función $K(q)$ es una estimación del orden de singularidad máximo γ_{\max} presente en una muestra finita de datos (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Tessier et al., 1993; Lovejoy y Schertzer, 1995). Según la figura 2, $\gamma_{\max} \approx 0.85$.

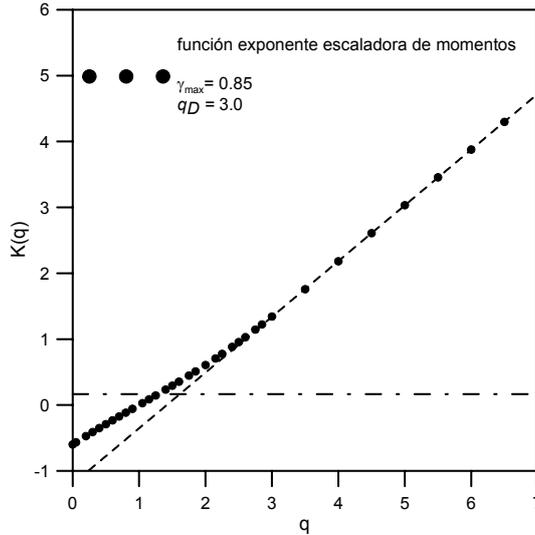


Figura 2. Función exponente empírica escaladora de momentos. Córdoba, datos horarios.

Una vez detectado el comportamiento multifractal de la serie de datos horarios de lluvia en Córdoba, puede aplicarse la metodología propuesta por Schertzer y Lovejoy (1987) para obtener los parámetros que caracterizan al modelo Multifractal Universal.

Para calcular el valor de los parámetros α y C_1 , se aplica la técnica del momento de traza doble (DTM). La figura 3 muestra la representación doblemente logarítmica del valor de $\left\langle \left(\varepsilon_\lambda^\eta \right)_\lambda^q \right\rangle$ frente a λ , para $q = 2$ y diversos valores de η . La linealidad que se observa en los puntos correspondientes a cada valor de η , muestra el comportamiento de escala de la serie de lluvia analizada. La pendiente de cada una de esas líneas rectas obtenidas, es una estimación del valor de $K(q, \eta)$, para $q = 2$ y su correspondiente valor de η .

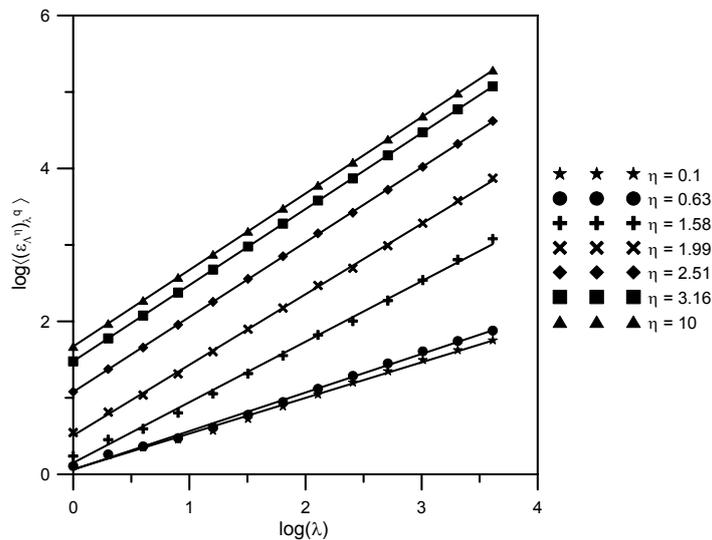


Figura 3. Técnica del momento de traza doble para $q = 2$

Repitiendo el procedimiento descrito para diversos valores de q , puede obtenerse la figura 4. En dicha figura, se representa el valor de $\log |K(q, \eta)|$ frente a $\log(\eta)$ para algunos de los valores de q analizados, concretamente aquellos que oscilan entre 1,75 y 3.

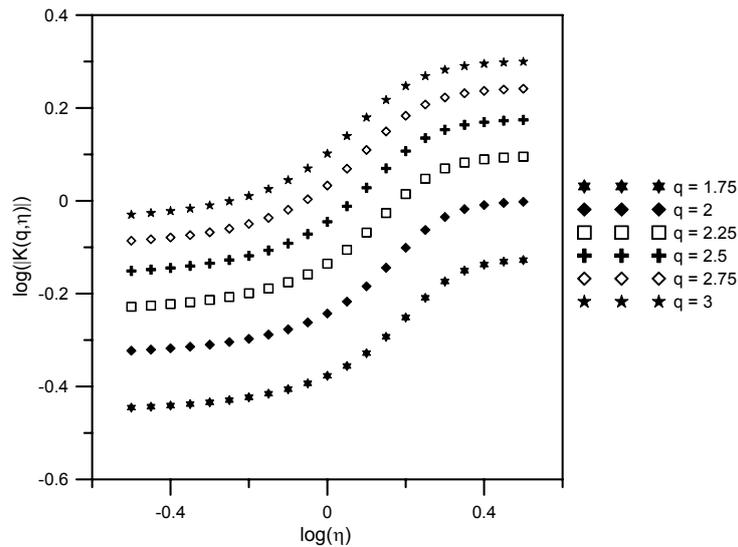


Figura 4. Variación de $\log|K(q, \eta)|$ frente a $\log(\eta)$ para diversos valores de q . Serie de datos horarios de lluvia.

El comportamiento de escala del proceso de la precipitación, puede observarse nuevamente en la figura 4, gracias al paralelismo de las curvas representadas en la misma. Del estudio del escalado de diez momentos q , comprendidos dentro del rango 1,75-3, se obtiene el valor de dos de los parámetros del modelo Multifractal Universal. Así la pendiente de los segmentos lineales que se detectan en parte central de las curvas de la figura 4 (y de las correspondientes al resto de momentos estudiados, que no aparecen representadas), permite obtener un valor de $\alpha = 0,734 \pm 0,012$. Con estos valores el valor del siguiente parámetro buscado vendrá dado por $C_1 = 0,443 \pm 0,003$.

Según el valor de α obtenido, el proceso de la precipitación estudiada pertenece a la clase universal con $1 < \alpha < 0$ (e.g. Lovejoy y Schertzer, 1990a), que se corresponde con procesos de tipo Lévy logarítmico con singularidades limitadas, denominados como multifractales condicionadamente fuertes. Este resultado concuerda con los obtenidos por autores como Tessier et al. (1993) para una red global de mil estaciones meteorológicas, Hubert et al. (1993) para la Isla de Reunión (Océano Índico), Ladoy et al. (1993) para Nimes (Francia), y de Lima y Grasman (1999) para Vale Formoso (Portugal).

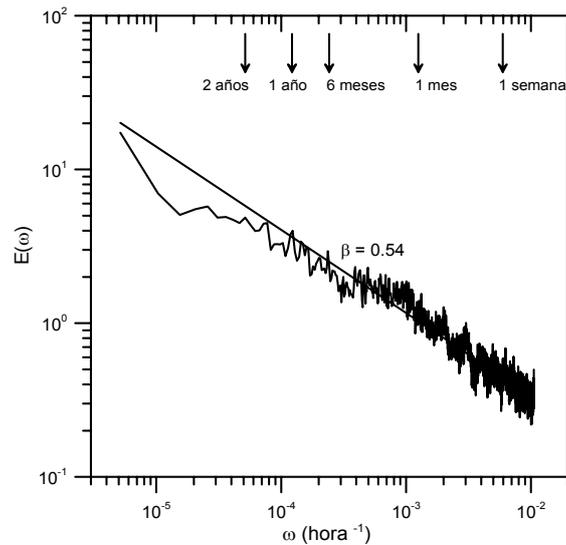


Figura 5. Espectro de energía de la serie de datos horarios de lluvia para Córdoba

Para obtener el tercer de los parámetros del modelo Multifractal Universal, es necesario calcular el valor del exponente fractal β . La figura 5, muestra el espectro de potencia, donde aparece el valor obtenido para el exponente fractal: $\beta = 0,54$. Mediante la ecuación (5), se calcula el valor del parámetro H . Para ello, una vez conocidos los valores de los parámetros anteriores, solo es necesario conocer el valor de la función $K(q)$ para $q = 2$. Según la función exponente empírica escaladora de momentos (figura 2), se obtiene un valor de 0,561. Por lo tanto, $H = 0,05$. Este valor de H , implica que el proceso de la precipitación en Córdoba es no conservativo. El conocimiento de todos los parámetros del modelo Multifractal Universal, permite obtener la función exponente teórica escaladora de momentos $K(q)$, que viene dada por la ecuación (2). Sustituyendo los valores de todos los parámetros multifractales calculados se obtiene la función buscada para los diferentes valores de q . La figura 6 muestra las funciones exponente escaladoras de momentos, empírica y teórica. La concordancia entre ambas funciones sólo es aceptable para un rango de momentos limitado por los órdenes más pequeños y el valor del momento crítico $q_{\max} = q_D \approx 3$. Un comportamiento similar fue detectado por autores como de Lima y Grasman (1999).

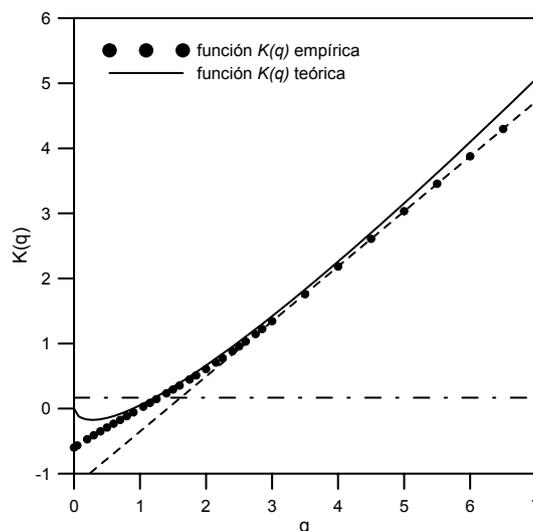


Figura 6. Función exponente (empírica y teórica) escaladora de momentos. Serie de datos horarios de lluvia.

5. Conclusiones

Del análisis de la serie de precipitación horaria de 23 años para Córdoba, se concluye que la multifractalidad puede utilizarse a la hora de describir la estructura temporal de la precipitación horaria en la citada localidad. Para llegar a esta afirmación se han explorado escalas de la precipitación que oscilan entre 1 hora y casi 6 meses, lo que ha permitido detectar una transición de fase multifractal de primer orden en la función exponente empírica escaladora de momentos. El mismo comportamiento está presente en la función teórica escaladora de momentos obtenida tras la aplicación del modelo Multifractal Universal. Salvo para los momentos más pequeños, ambas funciones escaladoras de momentos son similares hasta el valor crítico q_D . Este hecho sugiere que los multifractales universales pueden utilizarse para generar datos sintéticos de lluvia de elevada resolución aunque teniendo siempre presentes una serie de restricciones para las intensidades de lluvia más pequeñas. A la vista de todos estos resultados, cualquier modelo de lluvia aplicado a Córdoba debe reproducir el comportamiento multifractal de la precipitación.

Referencias

- [1] de Lima MIP, Grasman J. 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of Hydrology* 220: 1-11.
- [2] Hubert P, Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D, Ladoy P, Carbonnel JP, Violette S. 1993. Multifractals and Extreme Rainfall events. *Geophysical Research Letters* 20, 931-934.
- [3] Kolesnikov VN, Monin AS. 1965. Spectra of meteorological field fluctuations. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics* 1: 653-669.
- [4] Ladoy P, Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S. 1993. The multifractal temporal variability of Nimes rainfall data. *Comptes Rendus del Academie des Sciences Serie II* 317(6): 775-782.
- [5] Lovejoy S, Schertzer D. 1990a. Multifractals, universality classes, satellite and radar measurements of clouds and rain. *Journal of Geophysical Research*. 95(D3): 2021-2034.
- [6] Lovejoy S, Schertzer D. 1995. Multifractals and rain. In: Kundzewicz, A.W. (Ed.), *New uncertainty concepts in Hydrology and Hydrological modelling*, Cambridge Univ. Press, pp. 61-103.
- [7] Over TM, Gupta VK. 1994. Statistical analysis of mesoscale rainfall: dependence of a random cascade generator on large scaling forcing. *Journal of Applied Meteorology*, 33, 1526-1543.
- [8] Schertzer D, Lovejoy S. 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres* 92: 9693-9714.
- [9] Svensson C, Olsson J, Berndtsson R. 1996. Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. *Water Resources Research* 32: 2463-2472.
- [10] Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D. 1993. Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. *Journal of Applied Meteorology*, 32, 223-250.

Correspondencia

Amanda Penélope García Marín
 Universidad de Córdoba, Departamento de Ingeniería Rural, Área de Proyectos de Ingeniería.
 Av. Menéndez Pidal, s/n, 14004 Córdoba, Spain
 Phone: +34 695 21 85 32
 Fax: +34 957 21 85 63 E-mail: amanda.garcia@uco.es