04-014

MULTIFRACTAL ANALYSIS OF DIURNAL TEMPERATURE RANGE IN ANDALUSIA

Herrera Grimaldi, Pascual⁽¹⁾; García Marín, Amanda P.⁽¹⁾; Estévez Gualda, Javier⁽¹⁾

⁽¹⁾Universidad de Córdoba

The multifractal analysis it's as a useful tool to study the temporal structure of hydrometeorological variables. Different multifractal approaches can be applied for this purpose. In the present work, the multifractal properties of the Diurnal Temperature Range (DTR) of 197 meteorological stations of Andalusia have been studied. The multifractal turbulence formalism and the strange attractor formalisms have been applied in order to obtain detailed information about scale invariance properties. As a prerequisite, different methods of data quality control have been carried out, being this step essential to obtain accurate and reliable results. The validation process included gaps detection, range/limits delimitation, diurnal temperature range, and internal consistency and persistence tests. The scaling of the DTR moments has been analysed and empirical moments scaling exponent functions K(q) have been obtained, finding differences between stations. Likewise, the fractal dimension D1 and the multifractal degree (MD) have been obtained. Differences appeared again showing the different homogeneity and behaviour of the series analysed.

Keywords: Data quality; validation; multifractality; diurnal temperature range

ANÁLISIS MULTIFRACTAL DE LA AMPLITUD TÉRMICA DIARIA EN ANDALUCÍA

El análisis multifractal se presenta como una herramienta útil para el estudio de la estructura temporal de variables hidrometeorológicas, existiendo para este propósito distintas metodologías. En el presente trabajo se han analizado las propiedades multifractales de la amplitud térmica diaria de 197 estaciones de Andalucía mediante dos métodos, el formalismo multifractal de turbulencia y el formalismo del strange attractor, con el objetivo de obtener información detallada para un rango de escalas temporales. Como prerrequisito se han llevado a cabo diferentes métodos de control de calidad de datos, siendo este paso esencial para la obtención de resultados más precisos y de confianza, gracias a la detección de valores incorrectos y su descarte en los posteriores análisis. El proceso de validación incluyó la detección de huecos, rango/límites, salto térmico, consistencia interna y test de persistencia. El escalado de momentos K(q) obtenida, encontrándose diferencias entre estaciones. Igualmente, se ha obtenido el valor de la dimensión fractal D1 y el grado de multifractalidad (MD), existiendo nuevamente diferencias que ponen de manifiesto la diferente homogeneidad y comportamiento de las series analizadas.

Palabras clave: Calidad de datos; validación; multifractalidad; amplitud térmica diaria

Correspondencia: Pascual Herrera Grimaldi, o02hegrp@uco.es



1. Introducción

En la últimas décadas, el rango térmico diario (DTR, del inglés Diurnal/Diary Temperature Range) ha sido utilizado para análisis de tendencias del cambio climático, existiendo numerosos estudios por todo el mundo (Karl, Kukla y Gavin, 1984; Karl, Kukla y Gavin, 1986; Plantico et al. 1990; Karl et al. 1993; Weber et al. 1994; Jones 1995; Gallo, Easterling y Peter, 1996; Easterling et al. 1997; Dai ,Trenberth y Karl, 1999; Stone y Weaver, 2002; Braganza, Karoly y Arblaster, 2004; Vose, Easterling y Gleason, 2005; Wild, Ohmura y Makosky, 2007; Makowski, Wild y Ohmura, 2008; Zhou et al. 2009; Wu 2010). La temperatura media diaria es una variable que por sí sola no es suficiente para reflejar las complicadas variaciones del clima. De hecho, las tendencias en la temperatura media en la superficie terrestre en ocasiones son debidas a variaciones en las temperaturas máximas y mínimas diarias (Sun, Pinker y Kafatos, 2006), por lo que el DTR es un importante indicador del cambio climático (Karl, Karoly y Arblaster, 2004).

Los estudios de cambio climático en distintas zonas (Karl et al. 1991; Makowski, Wild y Ohmura, 2008), coinciden en que el DTR está decreciendo continuamente, estando atribuido a una creciente temperatura media diaria, y a un mantenimiento continuo de la temperatura máxima diaria (Karl et al. 1991; Easterling et al. 1997; Karl, Kukla y Gavin, 1984; Liu et al. 2004; Makowski, Wild y Ohmura, 2008).

Dada la relevancia de la variable, se hace preciso que el conjunto de datos climáticos tengan una calidad suficiente para mejorar las aplicaciones y modelos (Graybeal 2006). Además, resulta crucial también para obtener resultados precisos y de confianza, ya que continuamente resultados cuestionables se atribuyen a la baja calidad de los datos, quizás como consecuencia de la falta de métodos de control de calidad como prerrequisito para usar los datos meteorológicos (Estévez, Gavilán y Giráldez, 2011).

La temperatura, y en general el sistema climático, está gobernada por una amplia variedad de procesos físicos, y exhibe fluctuaciones en distintas escalas temporales y espaciales. La temperatura del aire en la superficie, uno de los indicadores fundamentales de las fluctuaciones y cambios en el sistema climático, muestra naturaleza fractal presentando una estructura auto-similar en un amplio rango de escalas de tiempo (Feng et al. 2009).

El objetivo del presente trabajo es mejorar el conocimiento de las series temporales de DTR a partir del análisis multifractal de series de datos registrados en 258 localizaciones distintas en Andalucía, tras realizar el procedimiento de validación de los datos de temperatura y DTR.

2. Materiales y métodos

2.1. Fuente de Datos

Los datos diarios de temperaturas máximas y mínimas usados en este trabajo han sido obtenidos de la Agencia Estatal de Meteorología dependiente del Ministerio de Agricultura y Pesca, Alimentación y Medio Ambiente de España. Los datos meteorológicos de cada estación presentan distintas longitudes temporales, siendo 1903 el primer año del que se tienen registros y 2006 el último año disponible. La distribución geográfica de las estaciones se muestra en la Figura 1. El rango de elevación de las estaciones va desde los 2 m y los 1800 m sobre el nivel del mar, la longitud desde 7° 31' 6,9934" a 1° 51" 47,015" Oeste y latitud desde 36° 52' 15,0043" y 38° 30' 1,9964" Norte.



Figura 1: Distribución espacial de las estaciones meteorológicas en Andalucía (España).

2.2. Procedimientos de validación

Los procedimientos recomendados para el control de calidad de datos de temperatura, y aplicados en este trabajo son: test de rango/límite (fijo y dinámico), test de salto térmico, test de consistencia interna y test de persistencia. Los datos meteorológicos que no pasen el test de rango fijo serán marcados como erróneos. Los datos desestimados por los otros test serán marcados como sospechosos y deberán ser finalmente validados mediante inspección manual (Estévez, Gavilán y Giráldez, 2011).

TEST DE RANGO

El test de rango está basado en la combinación de las especificaciones técnicas de cada sensor y los extremos físicos-climáticos para cada localización y variable. Los datos medidos deberían estar dentro de este intervalo de máximo y mínimo para ser considerados válidos (Reek, Doty y Owen, 1992; Meek y Hatfield, 1994; Shafer et al. 2000; Feng, Hu y Qian, 2004). Hay dos tipos de rango: fijo (físico e instrumental) y dinámico.

El test de rango fijo compara el valor de una variable meteorológica con un valor extremo establecido. Shafer et al. (2000) proponen la siguiente comprobación:

$$-30 < T (^{\circ}C) < 50$$
 (1)

Por otro lado, las características técnicas de los sensores habituales para medir temperatura suponen otro límite máximo y mínimo (Estévez, Gavilán y Giráldez, 2011):

$$-39,2 < T (^{\circ}C) < 60$$
 (2)

Todas las observaciones registradas fuera de este rango son marcadas como erróneas y no serán validadas por los siguientes test, descartándose dichos registros para los análisis posteriores.

Los límites dinámicos para cada variable meteorológica están basados en efemérides o valores extremos para cada localización. Los datos marcados por el test de rango dinámico fueron etiquetados como sospechosos y se verificaron posteriormente mediante inspección manual. Si un dato sospechoso (potencial outlier) es verificado favorablemente, es almacenado como nuevo valor extremo para la localización correspondiente.

TEST DE SALTO TÉRMICO

El procedimiento de control de calidad comprueba que la diferencia entre temperatura máxima y mínima no supere un valor umbral.

En este caso, Robinson (1998) estableció que la diferencia máxima admisible entre ambas temperaturas no debe de ser superior a los 30 °C:

TEST DE CONSISTENCIA INTERNA

Este test está basado en la comprobación de la consistencia climatológica o física de cada parámetro observado, o en la relación entre dos variables medidas (Grüter et al. 2001). En este sentido, los test propuestos por Reek, Doty y Owen, (1992) y Feng, Hu y Qian, (2004) establecen que las temperaturas máximas y mínimas deben de cumplir una serie de condiciones (Ecuaciones 4, 5 y 6).

(4)

- (5)
- (6)

TEST DE PERSISTENCIA O TEST DE CONSISTENCIA DE SERIES TEMPORALES

Т

Este test comprueba la variabilidad de las medidas. Cuando un sensor falla, en ocasiones genera un valor constante, por lo que la desviación estándar será baja. Meek y Hatfield (1994) propusieron un test válido para las distintas variables excepto para la precipitación, basado en la no observación de cambio en registros consecutivos durante un periodo de tiempo.

Una adaptación del test propuesto por Meek and Hatfield (1994), ha sido aplicado en el presente trabajo, comprobando la existencia consecutiva de valores iguales durante 6 días:

(7)

(8)

La elección de este número de días viene dada por la coexistencia de estaciones automáticas y manuales, por lo que la precisión en las mediciones no es homogénea.

2.3. Análisis multifractal

FORMALISMO MULTIFRACTAL DE TURBULENCIA

Existen diferentes metodologías para identificar la multifractalidad, siendo el formalismo de turbulencia desarrollado por Shertzer y Lovejoy (1987) uno de los más ampliamente usados en hidrología (Shertzer y Lovejoy, 1988; De Lima y Grassman, 1999; De Lima y De Lima,

2009, García-Marín et al. 2013). Siguiendo esta metodología, el comportamiento multifractal de un proceso puede ser analizado mediante el método del escalado de momentos estadísticos. El escalado de momentos puede ser descrito en base a la función exponente escaladora de momentos K(q), que satisface (Shertzer y Lovejoy, 1987):

$$\langle \varepsilon_{\lambda}^{q} \rangle$$
 (9)

Donde $\langle \epsilon_{\lambda}^{q} \rangle$ es el q-ésimo momento conjunto del proceso para una resolución λ dada, siendo λ el cociente entre la longitud del conjunto de datos y un intervalo de tiempo cualquiera, y K(q) es la llamada función exponente escaladora de momentos.

La función exponente empírica escaladora de momentos K(q), puede considerarse como una función característica del comportamiento fractal de un proceso (Svensson, Olsson y Berndtsson, 1996). Para procesos mono (fractales) (Mandelbrot 1972), la representación gráfica de K(q) frente a q es básicamente un línea recta. Si K(q) es lineal a través del origen, la medida es auto-similar. Sin embargo, si la función exponente escaladora de momentos no es lineal, sino convexa, la medida es multifractal (Parisi y Frisch, 1985; Veneziano, Langousis y Furcolo, 2006). La función empírica K(q) muestra una sección linear cuando los momentos q superan un valor crítico qcrit, q > qcrit. γ_{max} es el mayor orden de singularidad presente en la muestra de datos (Schertzer y Lovejoy, 1987; Tessier, Lovejoy y Schertzer, 1993; Lovejoy y Schertzer, 1995; De Lima y De Lima, 2009) y puede ser determinado por:

$$x(K)). (10)$$

El valor de la función K(q) para q = 0 es igual a la codimensión Cs del proceso. A partir de este valor puede obtenerse el correspondiente a la dimensión fractal D, D = 1 - Cs.

FORMALISMO STRANGE ATTRACTOR

Según este método (Hentschel y Procaccia, 1983; Grassberger, 1983; Halsey et al. 1986) la dimensión fractal de un conjunto de datos se define como el exponente de escala D0. La función Dq, para distintos valores de q se define como diemensión fractal generalizada. Las dimensiones fractales que más se utilizan para describir un proceso son D0, D1 y D2. Dq es una función decreciente con respecto a q, para una medida distribuida multifractamente (Saa et al. 2007) donde D0 > D1 > D2. La relación entre el espectro de las dimensiones fractales generalizadas (espectro de Rényi), Dq, y el espectro multifractal, f(α), siendo α el exponente de Lipschitz-Hölder (que cuantifica la fuerza de las singularidades medidas), viene dada por (Hentschel y Procaccia, 1983):

(13)

El valor más alto del espectro multifractal, $f(\alpha 0)$, se corresponde con la dimensión fractal D0.

(14)

$$f(\alpha_q)$$
 (15)

3. Resultados y discusión

3.1. Procedimientos de validación aplicados

Los resultados de la ejecución de los distintos test de validación, se ha resumido por provincia en la Tabla 1.

	Tests								
	Rango Fijo	Rango Dinámico		Salto Térmico	Consistencia Interna			Persistencia	
	Tx/Tn	Тx	Tn	Tx/Tn	Tx/Tn	Tx/Tn	Tx/Tn	Тх	Tn
AL	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,003 (0,045)	0,093 (0,217)	0,081 (0,494)	0,002 (0,016)	0,406 (2,446)	1,895 (22,467)
CÁ	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,005 (0,063)	0,036 (0,300)	0,018 (0,136)	0 (0)	0,721 (7,466)	0,726 (3,436)
CÓ	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,082 (1,384)	0,029 (0,121)	0,030 (0,200)	0,002 (0,050)	1,956 (15,391)	3,416 (14,768)
GR	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,018 (0,224)	0,024 (0,147)	0,056 (0,294)	0,005 (0,105)	0,771 (5,333)	1,826 (11,613)
HU	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,041 (0,957)	0,040 (0,419)	0,037 (0,217)	0	0,681 (6,275)	1,361 (7,379)
JA	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,028 (0,229)	0,102 (0,814)	0,117 (0,584)	0 (0)	0,554 (3,473)	1,404 (6,870)
MA	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,020 (0,341)	0,057 (0,311)	0,067 (0,494)	0 (0)	0,973 (4,585)	2,484 (13,399)
SE	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0,009 (0,175)	0,018 (0,042)	0,042 (0,255)	0 (0)	0,378 (4,082)	0,903 (10,765)

Tabla 1: Porcentaje de datos meteorológicos marcados por los test de control de calidad. El porcentaje de cada celda corresponde al valor promedio y el valor (máximo).

Nota: AL = Almería, CÁ = Cádiz, CÓ = Córdoba, GR = Granada, HU = Huelva, JA = Jaén, MA = Málaga, SE = Sevilla.

En todas las provincias, excepto Cádiz, los valores medios en cada provincia para la temperatura mínima son del orden de 2,5 veces superior que la temperatura máxima diaria.

La inspección visual de los datos detectados como sospechosos, ha llevado a descartar casi el cien por cien (99,75%) de los potencialmente erróneos.

3.2. Aplicación del formalismo multifractal de turbulencia

La Figura 2 muestra la función K(q) obtenida para dos estaciones. Puede observarse la forma convexa de la función, directamente relacionada con el carácter multifractal de la variable analizada. El valor del momento crítico qcrit para las estaciones seleccionadas es de 3,7 y 3,8, similar al valor obtenido con mayor frecuencia (3,8) para el 72% de las estaciones.

Figura 2: Función exponente escaladora de momento K(q) indicándose en ambos casos qcrit y γmax.



Los valores de γ_{max} oscilan entre 0,0098 para la estación "Chirivel" en Almería, hasta un valor máximo de 0,1970 en la estación "Faro de Adra" también en Almería. Los mayores valores de γ_{max} se relacionan con posibles eventos extremos o raros (García-Marín et al. 2013). En la Figura 3, se aprecian las diferencias en la distribución de los valores de DTR entre las provincias con valores de γ_{max} superiores e inferiores.



Figura 3: Mapa de distribución de los valores ymax de en Andalucía.

Como se puede apreciar, los valores más altos de γ_{max} en este caso están asociado a las zonas costeras de Andalucía (Figura 3), pudiendo ser explicado por el efecto amortiguador de las temperaturas del mar Mediterráneo y el océano Atlántico.

3.3. Aplicación del formalismo Strange Attractor

El comportamiento fractal de las series de DRT de Andalucía se ha analizado también mediante la aplicación del formalismo del strange attractor. La Figura 4 muestra el valor de la dimensión fractal Dq para valores de q que oscilan entre -10 y 10, con. D0 > D1 > D2. El valor más bajo de D1 se ha obtenido en la estación "Felix (CMA)" (0,982191) en Almería. El valor más alto de D1 se obtuvo en la estación "Vera (Inst. Laboral)" también en la provincia de Almería (0,998921).

A partir de la función Dq, se obtuvo el espectro multifractal $f(\alpha)$ para todas las estaciones. La Figura 5 muestra el espectro para las mismas estaciones que en la Figura 4, presentando forma de parábola invertida. El espectro mide el grado de multifractalidad (MD) de las series (Telesca y Lovallo, 2011). A mayor anchura del espectro, mayor será el grado de multifractalidad. Para un conjunto monofractal, la anchura será cero (Maity et al. 2015). El mínimo valor de MD fue 0,010977 y el máximo de 0,21021 correspondiente a las estaciones "Vera (Inst. Laboral)" y "Aznalcazar (Dehesa Nueva)" respectivamente.

Figura 4: La función de la dimensión fractal generalizada Dq para las estaciones 6277A (Faro de Adra - Almería) y 5403 (Almedinilla - Córdoba).

Figura 5: Espectro multifractal f(α) para las estaciones 6277A (Faro De Adra - Almería) y 5403 (Almedinilla - Córdoba).

4. Conclusiones

En el presente trabajo se han aplicado dos métodos de análisis multifractal (el formalismo multifractal de turbulencia y el formalismo del strange attractor), a series de DTR de 197 estaciones meteorológicas de Andalucía, previamente validadas mediante diferentes métodos de control de calidad (test rango fijo y dinámico, test de salto térmico, test de consistencia interna, test de persistencia). La validación de los datos ha permitido descartar datos erróneos para los posteriores análisis. La provincia de Cádiz ha sido la zona donde se ha descartado un menor número de datos, siendo la provincia de Córdoba donde más datos se han descartado. La mayor parte de los datos eliminados, se han detectado mediante la aplicación del test de pesistencia. En cuanto al análisis multifractal, se ha obtenido en todas las estaciones analizadas invarianza de escala para la variable DTR, siendo de 1 a 8 y de 1 a 16 días los intervalos temporales más repetidos. La función exponente escaladora de momentos ha permitido conocer la naturaleza multifractal de las series de datos, de acuerdo también con los resultados del formalismo del strange attractor. La función k(g) para g = 0, ha puesto en evidencia la ausencia de ceros en las series, algo que se esperaba tras la aplicación de los métodos de validación. El γ_{max} ha mostrado diferencias importantes entre las estaciones costeras y las interiores en la homogeneidad de sus datos, atribuido al efecto amortiguador del mar Mediterráneo y océano Atlántico sobre las temperaturas, apoyado además por los valores superiores de D1 obtenidos por el método del strange attractor.

Los resultados del presente trabajo podrán servir como base para futuras líneas de investigación donde sean necesarios valores de amplitud térmica diaria, como en modelos predictivos. También podrán ser utilizados para la regionalización de la variable a nivel de Andalucía o para agregar las estaciones en base a su comportamiento a diferentes escalas.

5. Referencias

Braganza, K., Karoly, D. J., & Arblaster, J. M. (2004). Diurnal temperature range as an index of global climate change during the twentieth century. Geophys. Res. Lett., 31.

- Dai, A., Trenberth, K. E. & Karl, T. R. (1999). Effects of Clouds, Soil Moisture, Precipitation, and Water Vapor on Diurnal Temperature Range. J. Climate., 12, 2451 2473.
- De Lima, M. I. P. & De Lima J. L. M. P. (2009). Investigating the multifractality of point precipitation in the Madeira archipielago. Nonlinear Processes Geophys. 16, 299–311.
- De Lima, MIP. & Grasman, J. (1999). Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. J. Hydrol. 220, 1–11.
- Easterling, D.R., Horton, B., Jones, PD., Peterson, TC., Karl, TR., Parker, DE., Salinger, J., Razuvayev, V., Plummer, N., Jamason, P., & Folland, C. K. (1997). Maximum and Minimum Temperature Trends for the Globe. Science, 277, 364 – 367.
- Estévez, J., Gavilán, P., Giráldez, J. V. (2011). Guidelines on validation procedures for meteorological data from automatic weather stations. J. Hydrol., 402, 144 154.
- Feng, S., Hu, Q., Qian, Q. (2004). Quality control of daily meteorological data in China, 1951 2000: a new dataset. Int. J. Climatol., 24, 853-870.
- Feng, T., Fu, Z., Deng, X. & Mao, J. (2009). A brief description to different multi-fractal behaviours of daily wind speed records over China. Phys. Lett. A., 373, 4134 4141.
- Gallo, K. P., Easterling, D. R., & Peterson, T. C. (1996). The Influence of Land Use/Land Cover on Climatological Values of the Diurnal Temperature Range. J. Climate, 9, 2941–2944.
- García-Marín, A. P., Ayuso-Muñoz, J. L., Jiménez-Hornero, F. J. & Estévez, J. (2013). Selecting the best IDF model by using the multifractal approach. Hydrolog. Process. 27, 433–443.
- Grassberger, P. (1983). Generalized dimensions of strange attractors. Physics. Letter A. 97: 227–230.
- Graybeal, D. Y. (2006). Relationships among daily mean and maximum windspeeds with application to data quality assurance. Int. J. Climatol. 26, 29–43.
- Grüter, E., Häberli, C., Küng, U., Mumenthaler, P., Mettler, J., Bassi, M., Konzelmann, T. & Dösseger, R. (2001). The next generation of quality control tools for meteorological data at MeteoSwiss. DACH-MT, 2001.
- Halsey, T. C., Jensen, M. H., Kadanoff, L. P., Procaccia, I. & Shraiman, B. I. (1986). Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. Phys. Rev. A. 33:1141–1151.
- Hentschel, H. G. E. & Procaccia, I. (1983). The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. Physica. D., 8, 435–444.
- Jones, P. D. (1995). Recent variations in mean temperature and the diurnal temperature range in the Antarctic. Geophys. Res. Lett. 22(11), 1345-1348.
- Karl, B., Karoly, D. J. & Arblaster, J. M. (2004). Diurnal temperature range as an index of global climate change during the twentieth century. Geophys. Res. Lett. 31, L13217.
- Karl, T. R., Jones, P. D., Knight, R. W., Kukla, G., Plummer, N., Razuvayev, V., Gallo, K. P., Lindseay, J., Charlson, R. J., & Peterson, T. C. (1993). A New Perspective on Recent Global Warming: Asymmetric Trends of Daily Maximum and Minimum Temperature. Bull. Amer. Meteor. Soc., 74, 1007–1023.
- Karl, T. R., Kukla, G., Gavin, J. (1986). Relationship between Decreased Temperature Range and Precipitation Trends in the United States and Canada, 1941–80. J. Climate Appl. Meteor., 25, 1878–1886.
- Karl, T. R., Kukla, G., Razuvayev, V. N., Changery, M. J., Quayle, R. G., Heim, R. R. J., Easterling, D. R., & Fu, C. B. (1991). Global warming: Evidence for asymmetric diurnal temperature change. Geophys. Res. Lett., 18(12), 2253–2256.
- Karl, T. R., Kukla, G., & Gavin, J. (1984). Decreasing Diurnal Temperature Range in the United States and Canada from 1941 through 1980. J. Climate Appl. Meteor., 23, 1489–1504.
- Liu, B., Xu, M., Henderson, M., Qi, Y. & Li, Y. (2004). Taking China's temperature: daily range, warming trends, and regional variations. J. Climate., 1955–2000.

- Lovejoy, S. & Schertzer, D. (1995). Multifractals and rain in New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources. Editado por Kundzewicz, Z. W. (Cambridge University Press–UNESCO International Hydrology Series, New York, 1995), pp. 61– 103.
- Makowski, K., Wild, M. & Ohmura A. (2008). Diurnal temperature range over Europe between 1950 and 2005. Atmos. Chem. Phys., 8, 6483 6498.
- Mandelbrot, B. B. (1972). Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence, in Statistical Models and Turbulence, Lectures Notes in Physics Vol. 12 (Springer-Verlag, New York, 1972), pp. 333–351.
- Meek, D. W. & Hatfield, J. L. (1994). Data quality checking for a single station meteorological databases. Agric. For. Meteorol. 36, 85 109.
- Maity, A. K., Pratihar, R., Mitra, A., Dey, S., Agrawal, V., Sanyal, S., Banerjee, A., Sengupta, R. & Ghosh, D. (2015). Multifractal detrended fluctuation analysis of alpha and theta EEG rhythms with musical stimuli. Chaos, Solitons Fractals., 81: 52-67.
- Parisi, G. & Frisch, U. (1985). Fully developed turbulence and intermittency Proc. International School of Physics Enrico. Fermi., Course LXXXVIII, Italian Physical Society. In: Ghil, M., Benzi, R., Parisi, G. (Eds.). Turbulence and predicability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics, North-Holland, Amsterdam.
- Plantico, M. S., Karl, T. R., Kukla, G. & Gavin, J. (1990). Is Recent Climate Change Across the United States Related to Rising Levels of Anthropogenic Greenhouse Gases? J. Geophys. Res., 95, 617–637.
- Reek, T., Doty, S. R. & Owen, T. W. (1992). A deterministic approach to the validation of historical daily temperature and precipitation data from the Cooperative Network. Bull. Am. Meteorol. Soc., 73, 753-762.
- Robinson, P. J. (1998). Monthly variations of dew point temperature in the coterminous United States. Int. J. Climatol., 18, 1539-1556.
- Saa, A., Gasco, G., Grau, J. B., Anton, J. M. & Tarquis, A. M. (2007). Comparison of gliding box and box counting methods in river network analysis. Nonlinear Process Geophys, 14:603–613.
- Schertzer, D. & Lovejoy, S. (1988). Multifractal simulations and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. Atmos. Res.21, 337–361.
- Schertzer, D. & Lovejoy, S. (1987). Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. J. Geophys. Res., 92, 9693–9714.
- Shafer, M. A., Fiebrich, C. A., Arndt, D. S., Fredrickson, S. E. & Hughes, T. W. (2000). Quality assurance procedures in the Oklahoma Mesonet. J. Atmos. Ocean. Technol. 17, 474–494.
- Stone, D. A. & Weaver, A. J. (2002). Daily maximum and minimum temperature trends in a climate model. Geophys. Res. Lett. 39 (9), 1356.
- Sun, D., Pinker, R., Kafatos, M. (2006). Diurnal temperature range over the United States: a satellite view. Geophys. Res. Lett., 33, L05705.
- Svensson, C., Olsson, J. & Berndtsson, R. (1996). Multifractal properties of daily rainfall in two different climates, Water Resour. Res. 32, 2463–2472.
- Tessier, Y., Lovejoy, S. & Schertzer, D. (1993). Universal multifractals in rain and clouds: Theory and observations. J. Appl. Meteorol. 32, 223–250.
- Telesca, L. & Lovallo, M. (2011). Analysis of time dynamics in Wind records by means of multifractal detrended fluctuation analysis and Fisher-Shannon information plane. J. Stat. Mech.: Theory Exp. P07001. doi:10.1088/1742-5468/2011/07/P07001
- Veneziano, D., Langousis, A. & Furcolo, P. (2006). Multifractality and rainfall extremes: A review. Water Resour. Res. 42(6).
- Vose, R. S., Easterling, D. R. & Gleason, B. (2005). Maximum and minimum temperature trends for the globe: An update through 2004. Geophys. Res. Lett. 32.

- Weber, R. O., Talkner, P. & Stefanicki, G. (1994). Asymmetric diurnal temperature change in the Alpine Region. Geophys. Res. Lett., 21(8), 673–676.
- Wild, M., Ohmura, A., & Makosky, K. (2007). Impact of global dimming and brightening on global warming. Geophys. Res. Lett. 34.
- Wu, Q. (2010). Associations of diurnal temperature range change with the leading climate variability modes during the Northern Hemisphere wintertime and their implication on the detection of regional climate trends. J. Geophys. Res., 115.
- Zhou, L., Dickinson, R. E., Dai, A. & Dirmeyer, P. (2009). Detection and attribution of anthropogenic forcing to diurnal temperature range changes from 1950 to 1999: comparing multi-model simulations with observations. Clim. Dyn., 35, 1289 1307.