

CONSIDERACIONES EN LA UTILIZACIÓN DE ELEMENTOS ESTOCÁSTICOS EN TÉCNICAS GRÁFICAS DE PLANIFICACIÓN DE PROYECTOS EN LA INDUSTRIA AERONÁUTICA

Alfredo Sanz-Lobera

Departamento de Materiales y Producción Aeroespacial. ETSI Aeronáuticos UPM

Miguel Ángel Sebastián

Departamento de Ingeniería de Construcción y Fabricación. ETSI Industriales UNED

Abstract

Graphic techniques applied to planning projects have been linked to aeronautical and aerospace industries throughout its history from its first applications. Besides the interest of the common benefits of these techniques, the use of elements in terms of probabilities, increases their options and converts them into powerful tools of exploration and monitoring in the field of project management. This paper proposes some considerations relating to the use of stochastic elements in the PERT, setting the basis for the use of such diagrams and emphasizing their use both in the professional and training fields. First, and based on a simple analytical support on distributions, the fundamental stochastic elements associated with the activities are presented. These elements are necessary to address complex design solutions. After this, some considerations about the influence and implications of the use of other types of probability distributions more complex and realistic are made. Finally issues related to stochastic set of activities that constitute the project are discussed, presenting a numerical application for easy viewing the effect and impact of the suggested stochastic probability model.

Keywords: probability; PERT; aeronautics; planning; projects

Resumen

Las técnicas gráficas aplicadas a la planificación de proyectos han estado ligadas a la industria aeronáutica a lo largo de su historia desde sus primeras aplicaciones. Además del interés de las prestaciones comunes de estas técnicas, la utilización de elementos en términos de probabilidades aumenta sus posibilidades y permite convertirlas en potentes herramientas de prospección y seguimiento en el ámbito proyectual. El presente trabajo plantea y desarrolla una serie de consideraciones relativas a la inclusión de elementos estocásticos en el PERT, estableciendo las bases para su utilización de este tipo de diagramas y enfatizando su utilización tanto en el terreno formativo como en el profesional. En primer lugar se presentan los elementos estocásticos fundamentales asociados a las actividades. A continuación se formulan consideraciones acerca de la influencia y las implicaciones que supone la utilización de distribuciones de probabilidad más complejas y realistas. Finalmente se desarrolla un modelo mejorado que sirve para analizar la incorporación de cuestiones estocásticas y se presenta una aplicación numérica que facilita la visualización del efecto estocástico y la repercusión del modelo de probabilidad seguido.

Palabras clave: probabilidad; PERT; aeronáutica; planificación; proyectos

1. Introducción

Aunque existen diversas técnicas gráficas de apoyo a la planificación de proyectos tales como los diagramas de Gannt, el CPM (Critical Path Method) o el Método Roy (Kerzner, 2009), desde sus comienzos en el programa Polaris (Malcolm et al 1959), el PERT ha sido la más directamente vinculada a la industria aeronáutica y aeroespacial (Hopeman, 1970, Sibbers, 1982). Uno de los motivos fundamentales de este hecho ha sido la envergadura de los proyectos relacionados con aeronaves y/o vehículos espaciales, ya que es en este tipo de proyectos dónde el PERT encuentra su campo de aplicación idóneo.

A pesar de ello, en los últimos años, el uso del PERT en la planificación de grandes proyectos en los sectores aeronáutico y aeroespacial ha decrecido, sin que exista una clara razón que lo justifique. Pese a algunas de las limitaciones propias del PERT, tales como las relacionadas con la subjetividad estimación de tiempos, sus excesivos requerimientos de claridad en la definición de las actividades y relaciones de precedencia o el excesivo énfasis con el que se atiende la ruta crítica (Heizer & Render, 2012), pocas herramientas pueden aportar al ingeniero de proyectos una información tan representativa de la planificación como la proporcionada por el PERT. Por otra parte, cuando se hace uso de sus capacidades en términos estocásticos se incrementan considerablemente sus prestaciones y capacidades

El presente trabajo se centra en esta última idea con la intención de poner de manifiesto la potencialidad del PERT. Para ello se presentan diversos conceptos estocásticos apoyados sobre ejemplos que ilustran su aplicación y su utilidad.

2. Conceptos estocásticos asociados al PERT

Todas las variables temporales utilizadas en el PERT se determinan a partir de los tiempos estimados de las actividades que conforman el proyecto. La Tabla 1 presenta un resumen de dichas variables así como de la nomenclatura de las mismas empleada a lo largo del presente trabajo. Aunque no aparecen recogidas en la Tabla 1, también son variables temporales las holguras de actividades obtenidas como diferencia entre los tiempos disponibles y tiempos estimados de la actividad.

El tiempo estimado de una actividad en el PERT está representado por una variable aleatoria, y como consecuencia de ello, todos los tiempos definidos en la Tabla 1 y las holguras de actividades también están representadas por variables aleatorias. Esta condición de aleatoriedad es una de las características más significativas que diferencian el PERT de otras técnicas gráficas de planificación.

En la definición original del PERT el tiempo estimado se representa mediante una distribución Beta (Forbes et al 2011) obtenida a partir de tres estimaciones (tiempo pesimista t_p , tiempo optimista t_o y tiempo probable o moda t_m) de los tiempos de dicha actividad. La adecuación del tipo de distribución y la validez de los resultados obtenidos a partir de tres estimaciones ha sido uno de los puntos que ha generado más controversia en el PERT. No cabe duda de que la adecuada elección de las funciones de distribución asociadas a cada actividad resulta fundamental cuando se desea conseguir unos resultados realistas.

Condicionar el comportamiento de todas las actividades a un determinado tipo de distribución resulta excesivamente restrictivo, sin embargo el PERT como tal, no presenta esta limitación ya que cada actividad puede adaptarse al tipo de distribución que mejor se ajuste a su desarrollo. Ello es independiente al hecho de que el PERT, en su formulación inicial, utilizase la distribución Beta para caracterizar el comportamiento aleatorio de los tiempos de las actividades.

Tabla 1. Tiempos asociados a sucesos y actividades

Tiempos asociados a	Denominación	Símbolo	Esquema
Sucesos	Tiempo máximo	t_{\max}	
	Tiempo mínimo	t_{\min}	
	Holgura	H	
Actividades	Tiempo estimado	t	
	Tiempo disponible total	t_T	
	Tiempo disponible libre	t_L	
	Tiempo disponible independiente	t_I	

NOTA: Los tiempos asociados a sucesos pueden llevar un subíndice adicional indicativo del suceso al que van referidos y los tiempos asociados a las actividades pueden llevar dos subíndices indicativos de los nodos inicial y final de la actividad considerada.

Matemáticamente la condición de aleatoriedad de la duración de cada actividad puede expresarse para como

$$prob\{t \leq T\} = \int_{-\infty}^T f(t) dt = F(T) \quad (1)$$

donde $prob\{t \leq T\}$ representa la probabilidad de que una actividad se desarrolle en un tiempo menor o igual que un tiempo dado T , $f(t)$ es la función de densidad de la distribución de la variable aleatoria t que define el tiempo de ejecución de la actividad y $F(t)$ es la función de distribución de dicha variable.

De manera análoga puede ser calculada la probabilidad de alcanzar un cierto suceso a través de un camino dado en un cierto tiempo, teniendo en cuenta que la variable temporal es en este caso la suma de los tiempos de las actividades que constituyen el camino o ruta considerado.

No debe confundirse la probabilidad de alcanzar un suceso en un tiempo dado T a través de un cierto camino, con la probabilidad de que dicho suceso ocurra en un tiempo T . Ambas probabilidades coincidirán exclusivamente cuando exista un único camino que conduzca a dicho suceso. En el caso de que exista más de un camino será necesario calcular la función de distribución de la variable z definida como

$$z = \text{máx} \{t_i\} \quad (2)$$

donde t_i representa la variable tiempo asociada a cada uno de los posibles caminos que conducen al suceso considerado, y determinar a partir de ella el valor de la probabilidad.

2.1. Distribuciones más usuales

Tal y como se ha indicado, la elección del tipo ó tipos de distribución que caracterizan las actividades en el PERT es un aspecto relevante sobre el que no hay acuerdo. Independientemente de las argumentaciones matemáticas a favor o en contra del uso de un determinado tipo de funciones, la cuestión más relevante es la adecuación de las distribuciones elegidas al comportamiento “real” de las actividades en términos estocásticos.

El grado de adecuación depende en gran medida del nivel de conocimiento de las actividades del proyecto, y puede diferir notablemente de unos proyectos a otros, siendo su repercusión en los resultados obtenidos muy superior al hecho de haber elegido uno u otro tipo de distribución. En lo que sigue se consideran los tipos de distribución más usuales, excluyendo la distribución uniforme que se considera la “distribución de referencia” en las aplicaciones desarrolladas en el apartado 4 del presente trabajo.

Distribución Beta

El planteamiento original del PERT propone como modelo matemático para la función de distribución del tiempo de una actividad la función Beta de Euler cuya función de densidad en el intervalo [0,1] puede expresarse mediante

$$f(x) = \frac{x^{(a-1)}(1-x)^{(b-1)}}{Beta(a,b)} \quad (3)$$

siendo a y b los denominados coeficientes de forma de la distribución y

$$Beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt \quad (4)$$

La media $\mu_{[0,1]}$ 0,1y la desviación típica $\sigma_{[0,1]}$ de la distribución en el intervalo [0,1] vienen dadas por

$$\mu_{[0,1]} = \frac{a}{a+b} \quad \sigma_{[0,1]} = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2(1+a+b)}} \quad (5)$$

y su determinación a partir de los valores temporales estimados para la actividad se realiza teniendo en cuenta que

$$\mu = \frac{1}{6}(t_p + 4t_m + t_o) \quad \sigma = \frac{t_p - t_o}{6} \quad (6)$$

donde t_p , t_o y t_m representan los tiempos pesimista, optimista y la moda respectivamente.

La distribución Beta es versátil y permite modelizar una gran cantidad de situaciones. Nótese, por ejemplo, que la Beta [1,1] coincide con la distribución Uniforme en el intervalo 0,1 U[0;1]. Las críticas de su utilización se encaminan más hacia método de estimación de sus parámetros que al uso de la propia distribución en sí (Nicholson 1971). Un posible inconveniente que puede suponer su utilización es la complejidad del tratamiento analítico derivado de la utilización conjunta de varias distribuciones Beta simultáneamente tal y como se verá más adelante

Distribución Normal

Una posible alternativa a la distribución Beta es la utilización de una distribución Normal $N(\mu, \sigma)$ cuya función de densidad es

Siendo μ y sigma la media $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ y σ la desviación típica, obtenibles mediante

las expresiones (6). La principal ventaja que tiene la utilización de la distribución Normal en lugar de la Beta deriva una mayor sencillez en los cálculos de probabilidad en la consideración conjunta de varias actividades simultáneamente, ya que la variable z definida como

$$z = \frac{t - \mu}{\sigma} \quad (8)$$

tiene una función de distribución normal $N(0;1)$. Los dos principales inconvenientes asociados a la utilización de la distribución Normal son la simetría y el intervalo de variación. En efecto, la distribución Normal es simétrica respecto a la media. Ello significa que el modelo solo sería válido si los tiempos optimista y pesimista se encontrasen a la misma distancia de la moda, lo cual no siempre sucede. El otro inconveniente deriva del intervalo de la variable aleatoria Normal que es $[-\infty, +\infty]$ y que en teoría habilita la posibilidad de valores negativos en los tiempos de ejecución de las actividades.

Distribución Normal truncada

Para paliar el segundo de los inconvenientes descritos en la distribución Normal, existe la posibilidad de utilizar la distribución Normal truncada en un determinado intervalo $[a,b]$. La función de densidad de esta distribución es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Erfc}\left[\frac{\mu-a}{\sqrt{2}\sigma}\right] + \frac{1}{2} \operatorname{Erfc}\left[\frac{\mu-b}{\sqrt{2}\sigma}\right] \right)} & a < x \leq b \\ 0 & x \geq a, x > b \end{cases} \quad (9)$$

siendo

$$\operatorname{Erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (10)$$

Su uso presenta el inconveniente de dificultar el tratamiento analítico conjunto y simultáneo de varias distribuciones y, salvo casos muy concretos, no aporta demasiado respecto al uso de la distribución normal sin truncamiento.

Distribución Triangular

La distribución triangular es una simplificación de la distribución Beta y puede ser utilizada en su lugar. Su tratamiento analítico es más sencillo, pero los inconvenientes inherentes a la distribución Beta se mantienen e incluso se acentúan. Para una distribución triangular en el intervalo $[a,b]$ cuya moda es c , la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c < x \leq b \\ 0 & a \geq x, b < x \end{cases} \quad (11)$$

siendo la media y la desviación típica

$$\mu = \frac{1}{3}(a+b+c) \quad \sigma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - bc + c^2 - a(b+c)}}{3\sqrt{2}} \quad (12)$$

2.2. Método de Monte Carlo

Cuando el número de actividades de un proyecto se incrementa, el tratamiento analítico del problema no resulta sencillo, dado que las distribuciones de los tiempos de las actividades que constituyen el proyecto, no serán en general funciones tan simples como las empleadas en los ejemplos del apartado anterior, pudiendo darse el caso de que para ciertas actividades la función de densidad no sea expresable analíticamente, y se conozca solamente como un conjunto de valores obtenidos a partir de experiencias previas. Por todo ello, para el cálculo de probabilidades en el PERT, resulta en general conveniente la utilización de métodos numéricos en sustitución de expresiones matemáticas que pueden llegar resultar excesivamente complejas desde el punto de vista analítico. Un método numérico aplicable al cálculo de probabilidades en el PERT es el Método de Monte Carlo, pudiendo obtenerse a partir de él unos resultados suficientemente aceptables sin requerir para ello grandes recursos matemáticos.

3. Diagramas PERT elementales

Aunque los diagramas PERT pueden llegar a alcanzar una gran complejidad cuando el número de actividades del proyecto aumenta, desde el punto de vista estocástico, el PERT puede analizarse a partir de los tres diagramas elementales expuestos a continuación.

3.1. PERT unitario

El diagrama PERT más elemental se corresponde con un proyecto en el que exista una sola actividad que comience en el suceso inicial y acabe en el suceso final. En este caso la probabilidad de realización del proyecto en un tiempo T coincide con la probabilidad de realización de la actividad en dicho tiempo, es decir, la probabilidad indicada en la expresión (1). Para llegar a un resultado concreto, supóngase un proyecto integrado por una única actividad cuyo tiempo de ejecución t se ajusta a una distribución uniforme $U [0;1]$, tal y como muestra la figura 1.

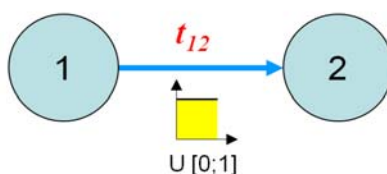


Figura 1. PERT unitario

Las funciones de densidad $f(t)$ y de distribución $F(t)$ de la variable t vendrán expresadas por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \quad (13)$$

cuya representación gráfica aparece en la figura 2

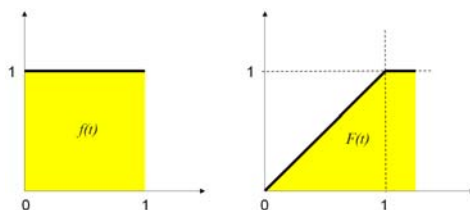


Figura 2. Funciones de densidad y de distribución del ejemplo del PERT unitario

Por lo que resulta inmediato determinar la probabilidad de alcanzar el suceso final (suceso 2) en un tiempo T , puesto que dicha probabilidad es igual a T , si T está comprendido entre 0 y 1, y es igual a 1 si T es mayor que 1.

3.2. Actividades en serie

Sea un proyecto integrado por dos actividades en serie y cuyos tiempos asociados se ajustan a una distribución uniforme $U [0;1]$. El diagrama PERT será el indicado en la figura 3

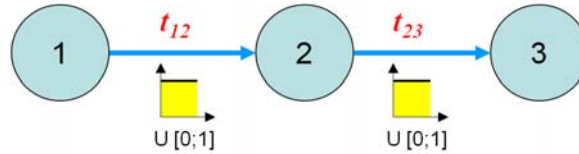


Figura 3. Actividades en serie

La probabilidad de alcanzar el suceso 3 (finalización del proyecto) en un tiempo dado T será el valor de la función de distribución de la variable aleatoria t definida como $t = t_{12} + t_{23}$.

En este caso se demuestra (Montgomery 2006) que la expresión de las funciones de densidad $f(t)$ y de distribución $F(t)$ de la variable t vendrán expresadas por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 < t \leq 1 \\ -1+2t-\frac{t^2}{2} & 1 < t \leq 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases} \quad (14)$$

cuya representación gráfica aparece en la figura 4

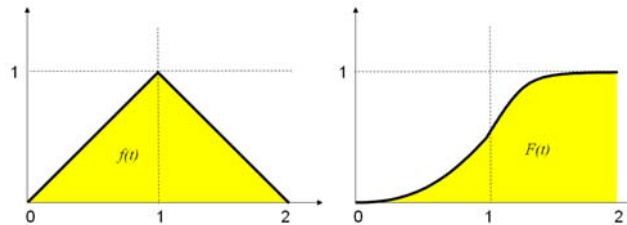


Figura 4. Funciones de densidad y de distribución de 2 actividades uniformes en serie

por lo que la solución del problema para un tiempo T se obtiene determinando el valor de la función de distribución $F(T)$ definida en (6). Si en lugar de dos actividades existiesen n actividades en serie, la determinación de la probabilidad se realizaría de manera análoga calculando la función de distribución de la variable aleatoria t , suma de los tiempos de todas las actividades del camino o ruta.

3.3. Actividades en paralelo

Sea un proyecto constituido por dos actividades independientes cuyos tiempos asociados tienen una función de distribución uniforme en el intervalo $[0;1]$. El diagrama PERT correspondiente es el indicado en la figura 5. En él se han supuesto para completar el PERT del proyecto dos actividades ficticias con un tiempo asociado de $t=0$.

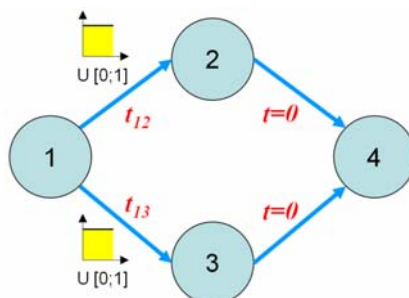


Figura 5. Actividades en paralelo

El tiempo de finalización del proyecto será el de aquella actividad que presente una mayor duración entre las dos que constituyen el proyecto. Matemáticamente la variable que define dicho tiempo puede expresarse como $t = \max\{t_{12}, t_{13}\}$. Las funciones de densidad $f(t)$ y de distribución $F(t)$ de la variable t vendrán expresadas por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \quad (15)$$

cuya representación gráfica aparece en la figura 6

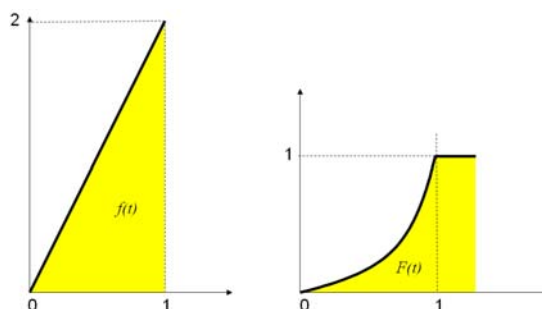


Figura 6. Funciones de densidad y de distribución de dos actividades uniformes en paralelo

Nuevamente el problema de conocer la probabilidad de finalizar el proyecto en un tiempo T , queda reducido a conocer los valores de la función de distribución para dicho tiempo. Si el número de actividades en paralelo fuese n , la variable aleatoria t se definiría como el máximo de los tiempos de cada una de las actividades.

Los tres casos descritos ilustran el método de cálculo para determinar la probabilidad de alcanzar un suceso cualquiera en un diagrama PERT, dado que, por muy complejo que éste resulte, siempre es posible ir reduciendo las relaciones entre actividades a uno de los tres casos presentados.

La figura 7 muestra los resultados obtenidos tras la aplicación del método de Monte Carlo para los casos particulares de actividades en serie y en paralelo descritos en los apartados precedentes, pudiendo comprobarse como se ajustan a los obtenidos analíticamente en las expresiones (6) y (7).

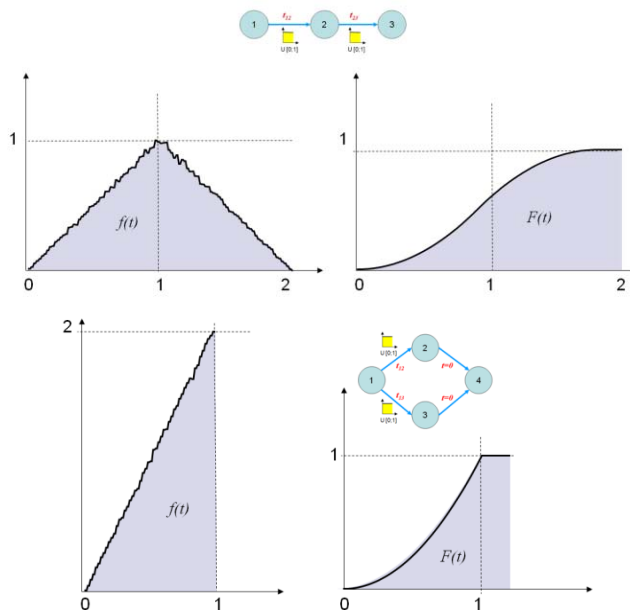


Figura 7. Funciones de densidad y de distribución de los ejemplos 2 (actividades en serie) y 3 (actividades en paralelo) obtenidas mediante el método de Monte Carlo (100000 iteraciones)

4. Consideraciones estocásticas asociadas a secuencias de actividades

Una vez definidos los elementos estocásticos básicos requeridos en el PERT, se muestran a continuación su aplicación a las principales situaciones asociadas a secuencias de actividades, lo que permite resolver cualquier situación que se produzca en un diagrama PERT desde el punto de vista estocástico, por complejo que éste pueda resultar.

4.1. Caminos con actividades comunes

Una situación muy frecuente en el PERT aparece cuando existen dos o más caminos que conducen a un mismo suceso y entre ellos existen actividades comunes. La figura 8 muestra un ejemplo de esta situación en la que los caminos ACZ y BDZ conducen al suceso 5 (partiendo desde el suceso inicial 1) y comparten la actividad Z

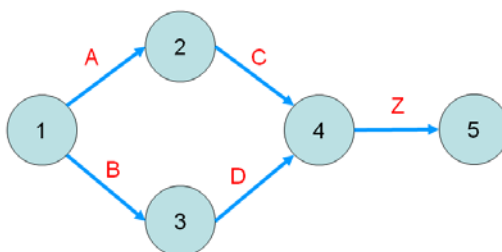


Figura 8. Caminos con actividades comunes

En términos de probabilidad podría pensarse que los caminos ACZ y BDZ no son independientes al compartir una actividad, sin embargo, el enfoque del problema no debe realizarse analizando la independencia de los caminos sino de las actividades. En efecto, si las actividades A,B,C,D y Z son independientes entre sí, sus duraciones también lo serán, y por lo tanto las variables obtenidas de la suma de los tiempos individuales $t_{ACZ}=t_A+t_C+t_Z$ y $t_{BDZ}=t_B+t_D+t_Z$ serán también independientes. Suponiendo que todas las variables del ejemplo representado en la figura 8 sean uniformes $U[0;1]$ el resultado obtenido por aplicación del método de Monte Carlo es el mostrado en la figura 9

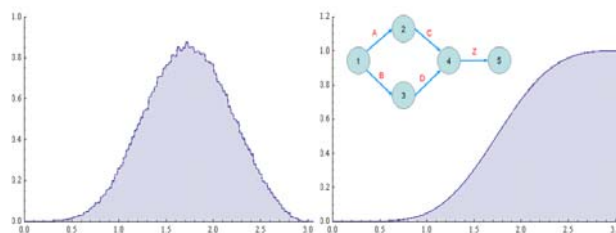


Figura 9. Caminos con actividades comunes con distribución U[0;1]

4.2. Caminos críticos y pseudo-críticos

Una de las características más destacada del PERT es la de proporcionar la información acerca de los caminos o rutas críticas. En efecto, en todo proyecto modelizado mediante un diagrama PERT, existe al menos una ruta o camino que une los sucesos inicial y final y que está formada por actividades críticas, es decir, por actividades en las que la diferencia entre el tiempo total disponible de la actividad y el tiempo estimado de la misma, también denominada holgura total, es nulo. Esta característica es muy interesante en grandes proyectos, ya que permite al ingeniero de planificación identificar aquellas actividades cuyo retraso implicará la el retraso del proyecto global y centrar su atención en el control más exhaustivo las mismas.

En proyectos grandes, suelen existir caminos que no cumplen la condición de ser críticos, bien porque no todas las actividades que los componen son críticas o bien porque las actividades tienen holguras totales no nulas próximas a cero. La resolución no estocástica del PERT no presenta estos caminos como críticos, sin embargo, según la distribución de los tiempos de las actividades, la contribución al desarrollo del proyecto de estos caminos pueden llegar a ser muy significativa. Para ilustrar este efecto, supóngase un proyecto construido a partir de las actividades definidas en la tabla 2. Puede observarse que se consideran cuatro casos en los que la desviación típica de las actividades B y D varía dentro del rango {0.1 , 0.5 , 2 , 3}, mientras que la desviación típica del resto de las actividades permanece constante.

Tabla 2. Definición de actividades

Actividad	Precedencia	Distribución	Media	Desviación típica			
				Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
A	*	Normal $[\mu, \sigma]$	4	2	2	2	2
B	*	Normal $[\mu, \sigma]$	3.5	0.1	0.5	2	3
C	A	Normal $[\mu, \sigma]$	4	2	2	2	2
D	B	Normal $[\mu, \sigma]$	3.5	0.1	0.5	2	3
Z	C,D	Normal $[\mu, \sigma]$	4	1	1	1	1

El diagrama PERT del proyecto correspondiente a las actividades definidas en la tabla 2 es el representado en la figura 8. La figura 10 muestra los resultados obtenidos en cada caso aplicando el método de Monte Carlo.

Cabe indicar que a medida que aumenta la desviación típica de las actividades B y D, el camino pseudo-crítico BDZ cobra una mayor relevancia, llegando a convertirse en crítico en un porcentaje superior al 36% en el caso más desfavorable (figura 10 caso 4, $\sigma=3$)

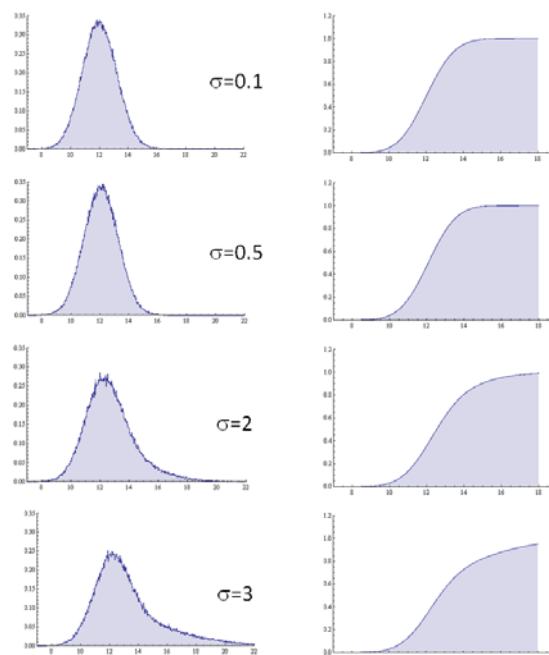


Figura 10. Distribución del tiempo de proyecto con caminos pseudocríticos según tabla 2

4.3. Comparación entre distribuciones

Para realizar una comparación entre los diferentes tipos de distribuciones consideradas se va a realizar una aplicación práctica sobre el proyecto definido en la tabla 2 tomando las estimaciones de tiempos recogidas en la tabla 3.

Tabla 3. Estimaciones para los tiempos de actividades

Actividad	Precedencia	t optimista	moda	t pesimista
A	*	1	2	5
B	*	1	2	5
C	A	1	2	5
D	B	1	2	5
Z	C,D	1	2	5

Los resultados obtenidos se resumen en la tabla 4 y en las figura 11

Tabla 4. Resultados de intercomparación de distribuciones para el proyecto de la Tabla 3

Probabilidad	Beta	Normal	Triangular	Normal Tr.
0.50	7.49205	7.52498	8.63676	7.58695
0.60	7.77143	7.78367	8.99212	7.83859
0.70	8.07348	8.06359	9.37355	8.10944
0.80	8.43004	8.39254	9.83552	8.43028
0.90	8.93914	8.85285	10.4728	8.88649
0.95	9.36036	9.24271	11.0009	9.26781
0.96	9.48391	9.35505	11.1484	9.37742
0.97	9.63231	9.49233	11.3272	9.51289

0.98	9.83393	9.67770	11.5724	9.68990
0.99	10.1501	9.96896	11.9202	9.97171
Media	7.53509	7.53408	8.68273	7.60916
Desv. Típica	1.13291	1.05369	1.82103	0.962583

Puede observarse cómo la distribución que más se aleja de las restantes es la triangular, como consecuencia de la simplificación que supone la linealidad entre los tres valores de tiempos estimados. La diferencia entre la distribución Beta y las distribuciones normales (truncada y sin truncar) es muy reducida. La distribución Beta se va haciendo más pesimista respecto a las normales a medida que los valores de probabilidad se aproximan a la unidad. Asimismo, la diferencia entre la distribución normal y la distribución truncada es prácticamente inapreciable. Por todo ello, puede concluirse que la elección de la distribución Beta frente a la normal no es muy relevante y que el aspecto realmente importante es la correcta estimación de los tiempos, más que el tipo de distribución que los representa. Aunque se trata de un ejemplo particular, las conclusiones son extrapolables a la mayoría de las situaciones reales que se producen en los proyectos.

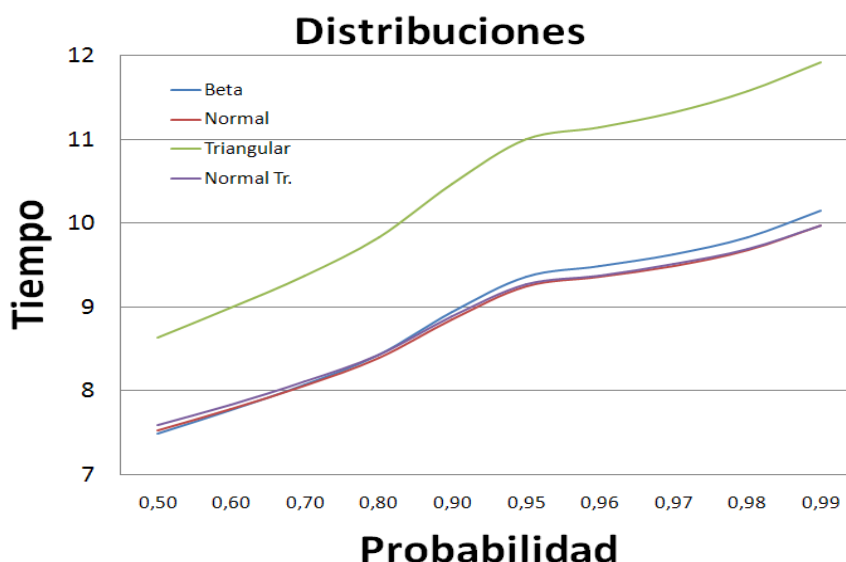


Figura 11 Tiempo estimado del proyecto para una probabilidad dada

5. Conclusiones

El PERT ha sido la técnica de planificación más directamente vinculada a los proyectos propios del sector aeronáutico y aeroespacial. En los últimos años su utilización ha decrecido, en parte como consecuencia de no haberse hecho uso de todo su potencial estocástico. El presente trabajo, en base a las diversas consideraciones formuladas a lo largo del mismo, ha presentado los fundamentos estocásticos más relevantes de aplicación en el PERT, comenzando por los más puramente matemáticos hasta llegar a las situaciones prácticas más habituales en la planificación de los proyectos. Ello ha permitido la formulación de una serie de directrices a tener en cuenta cuando se intenta obtener un aprovechamiento máximo de las características del PERT. Para ello se ha presentado el tratamiento estocástico de los diagramas PERT tomando como punto de partida los diagramas elementales que constituyen la base para la resolución de situaciones

proyectuales más complejas y desarrollando un método mejorado de análisis que ha permitido la realización de un estudio comparativo de la repercusión que supone la adopción de los distintos modelos de distribuciones de probabilidad de uso habitual, que requiere, casi ineludiblemente, la utilización de métodos numéricos tales como el método de Monte Carlo.

Una de las principales conclusiones puesta de manifiesto a lo largo de todos los desarrollos realizados en el presente trabajo es la necesidad de enfatizar el uso de las características estocásticas asociadas al PERT tanto desde el punto de vista aplicativo como desde el formativo. Para ello debe hacerse un uso más eficiente de las herramientas informáticas actualmente disponibles, impensables en los orígenes del PERT, que abren nuevas e interesantes perspectivas a su utilización en Ingeniería de Proyectos.

6. Referencias

- Forbes, C., Evans, M., Hastings, N., Peacock, B. (2011) *Statistical distributions*. 4th ed p. cm. Wiley series in probability and statistics, ISBN 978-0-470-39063-4
- Heizer, J., Render B. (2012) *Operations Management Flexible Version*, 10 Ed Prentice Hall, ISBN-13: 9780132163927
- Hopeman, R. J. (1970) *The NASA scheduling system: The techniques of scheduling in the Apollo Program*, NASA Technical Reports Server (NTRS)
- Kerzner, H. (2009) *Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling* (10th Edition), John Wiley & Sons Inc, 10th Edition, ISBN: 978-0-470-27870-3
- Malcolm, D. G., Roseboom J. H., Clark C. E, Fazar W. (1959) *Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation* *Operations Res* 7 (5):646-669
- Montgomery D. C. (2006) *Engineering Statistics*, 4 Edition, Wiley, ISBN: 978-0-471-73557-1
- Nicholson, R. M. (1971) *A Critical Look at PERT Analysis* Technical Report TR-154 NGL-21-002-008, College Park, Maryland
- Sibbers, C. W. (1982) *An Assessment of PERT as a Technique for Schedule Planning and Control*, NASA Technical Memorandum 83265

Correspondencia (Para más información contacte con):

Alfredo Sanz Iobera.
Phone: + 34 91 336 63 30
Fax: + 91 336 63 34
E-mail: a.slobera@upm.es